

1 Ön Bilgiler ve Hata Analizi

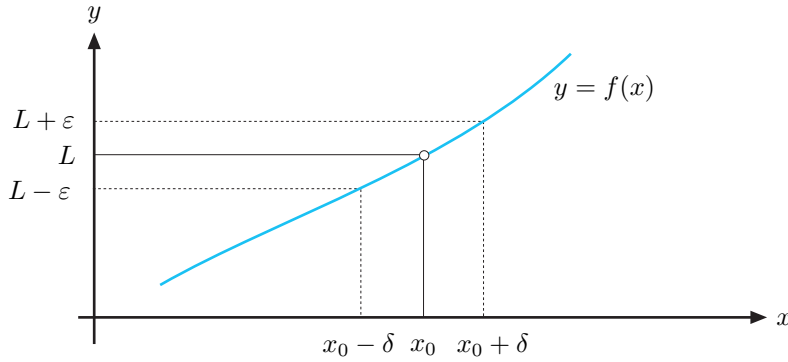
1.1 Ön Bilgiler

1.1.1 Limit ve Süreklilik

Tanım 1.1.1. f fonksiyonu bir X reel sayı cümlesi üzerinde tanımlanmış olsun. Her ε pozitif sayısına karşılık $0 < |x - x_0| < \delta$ ($x \in X$) olduğu müddetçe $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı var ise bu durumda f fonksiyonun x_0 noktasında **limiti** L 'dir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

olarak yazılır (Bkz. Şekil 1.1).



Şekil 1.1: Limit ifadesinin geometrik gösterilimi

Tanım 1.1.2. f fonksiyonu bir X reel sayı cümlesi üzerinde tanımlanmış ve $x_0 \in X$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

eşitliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna x_0 noktasında **süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu X cümlesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonu X **cümlesi üzerinde süreklidir** denir.

Bir X cümlesi üzerinde sürekli olan tüm fonksiyonların cümlesi $C(X)$ ile gösterilsin. Eğer X cümlesi reel sayı doğrusu üzerindeki bir aralık ise bu notasyonda parantezler ihmal edilecektir. Örneğin, $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli fonksiyonların cümlesi $C[a, b]$ olarak ifade edilir. Benzer şekilde $\mathbb{R}$, reel sayılar cümlesi üzerindeki her noktada sürekli olan fonksiyonların cümlesi $C(\mathbb{R})$ veya $C(-\infty, \infty)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.3. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ reel sayıların sonsuz bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n > N(\varepsilon)$ olduğu müddetçe $|x_n - x| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı var ise bu dizinin limiti x 'dir (ya da dizi x 'e yakınsar) denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{ya da} \quad n \rightarrow \infty \text{ için } x_n \rightarrow x$$

olarak gösterilir.

Teorem 1.1.4. f fonksiyonu bir X reel sayı cümlesi üzerinde tanımlanmış ve $x_0 \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (a) f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli;dir;
- (b) X içindeki herhangi bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi x_0 'a yakınsıyor ise $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ eşitliği sağlanır.

Bir fonksiyonunun öngörülebilir davranışı için minimum beklenti, göz önüne alınan fonksiyonun sürekli olmasıdır. Dolayısıyla bu derste sürekli fonksiyonlar üzerinden yaklaşımlar yapılacaktır.

1.1.2 Diferansiyellenebilme

Tanım 1.1.5. f fonksiyonu x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlanmış olsun. Eğer

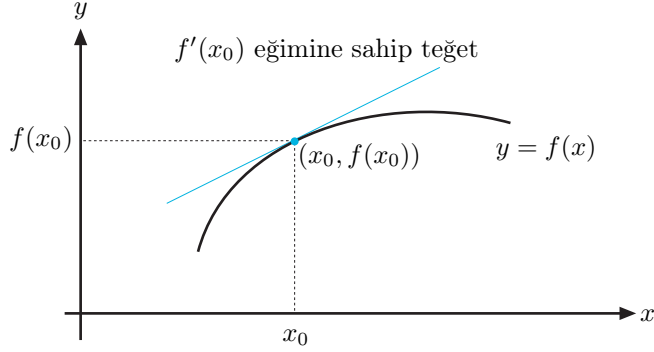
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti var ise f fonksiyonuna x_0 noktasında **diferansiyellenebilir** denir. $f'(x_0)$ değeri f fonksiyonunun x_0 noktasındaki **türevi** olarak adlandırılır. Bir X cümlesinin her noktasında türevi olan bir fonksiyona X **üzerinde diferansiyellenebilir** denir.

$f'(x_0)$ sayısı f fonksiyonuna $(x_0, f(x_0))$ noktasından çizilen teğetin eğimidir (Bkz. Şekil 1.2).

Teorem 1.1.6. f fonksiyonu x_0 noktasında diferansiyellenebilirse bu noktada aynı zamanda sürekli;dir.

Takip eden teoremler, hata tahminleri için geliştirilen metotlarda önemli yere sahiptirler. Buradan önceki ve sonraki teoremlerin ispatları Analiz derslerinde yapıldığından ispatlar Nümerik Analiz dersi müfredatı dahilinde değildir.

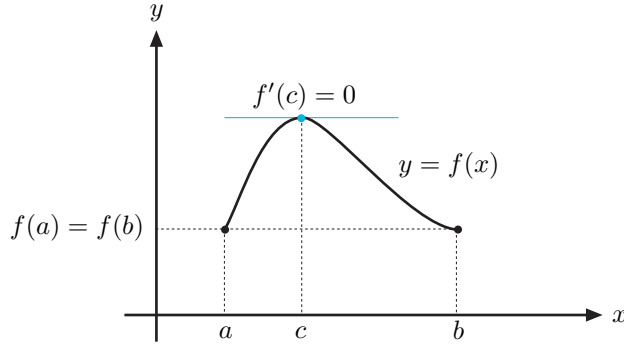


Şekil 1.2: Türev ifadesinin geometrik gösterilimi

X reel sayı cümlesi üzerinde n . mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların cümlesi $C^n(X)$ ile, her mertebeden türeve sahip fonksiyonların cümlesi $C^\infty(X)$ ile gösterilsin. Polinom, rasyonel, trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonlar, X bu fonksiyonların tanımlı olduğu cümleyi göstermek üzere, $C^\infty(X)$ cümlesine aittirler. Daha önceden de vurgulandığı gibi X cümlesi reel sayı doğrusu üzerinde bir aralığı gösteriyor ise bu notasyonda parantezler ihmal edilecektir.

Teorem 1.1.7. (Rolle Teoremi)

$f \in C[a, b]$ ve f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ eşitliği sağlanıyor ise $f'(c) = 0$ olacak şekilde (a, b) aralığında bir c sayısı vardır (Bkz. Şekil 1.3).



Şekil 1.3: Rolle teoremi

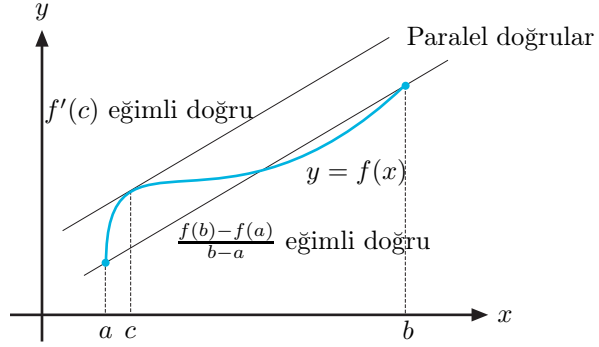
Teorem 1.1.8. (Ortalama Değer Teoremi)

$f \in C[a, b]$ ve f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Bu

durumda (a, b) aralığı içinde

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

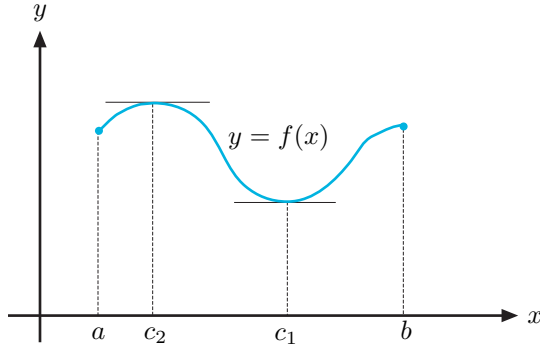
eşitliğini sağlayan bir c sayısı vardır (Bkz. Şekil 1.4).



Şekil 1.4: Ortalama değer teoremi

Teorem 1.1.9. (Ekstreum Değer Teoremi)

$f \in C[a, b]$ ise her $x \in [a, b]$ için $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in [a, b]$ sayıları vardır. Buna ek olarak eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir ise c_1 ve c_2 sayıları ya $[a, b]$ aralığının uç noktalarıdır ya da f' türevini sıfır yapan değerlerdir (Bkz. Şekil 1.5).



Şekil 1.5: Ekstreum değer teoremi

Teorem 1.1.10. (Genelleştirilmiş Rolle Teoremi)

$f \in C[a, b]$ fonksiyonu (a, b) aralığında n defa diferansiyellenebilir olsun. Eğer $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ gibi $(n + 1)$ tane farklı noktada f fonksiyonu

Ortalama Değer Teoremi: $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sürekli, $f'(x)$ türevi (a,b) aralığında mevcut ise

$$\exists c \in (a,b), \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Örnek $f(x) = 3x^2 - 5$ fonksiyonunun $[-2,0]$ aralığında O.D.T koşullarını sağladığını gösteriniz ve teoremin ifadesindeki ' c ' sabitini bulunuz.

1) $f(x) = 3x^2 - 5$ $x \in [-2,0]$ da sürekli

2) $f'(x) = 6x$, $x \in (-2,0)$ da mevcut koşullar sağlandı. o halde

$$\exists c \in (-2,0) \quad f'(c) = 6c = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)}$$

$$\Rightarrow 6c = \frac{-5 - 7}{2} = -6$$

$$\Rightarrow \boxed{c = -1} \in (-2,0)$$

Ara-Değer Teoremi: $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(a) \cdot f(b) < 0$ ise 0 holde $\exists c \in (a, b), f(c) = 0$.

Örnek $f(x) = \sqrt{\pi x} - \cos(\pi x)$ fonksiyonu verilsin. $f(x) = 0$ denkleminin $[0, 1]$ aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz.

1) $f(x)$ fonksiyonu $[0, 1]$ de sürekli dir.

2) $f(0) = -1 < 0$
ve $f(1) = \sqrt{\pi} - (-1) = 2,7725 > 0$

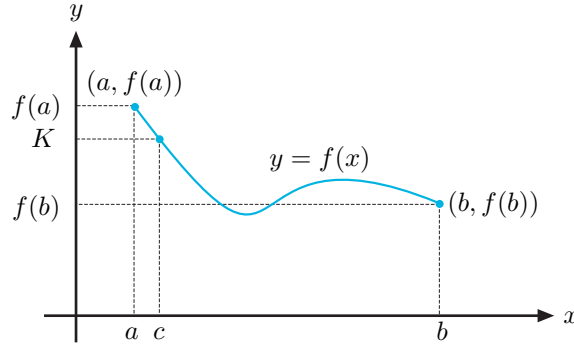
Dolayısıyla $f(0) \cdot f(1) < 0$

3) $\exists c \in (0, 1) \quad f(c) = \sqrt{\pi c} - \cos(\pi c) = 0$

sıfır değerini alıyor ise (x_0, x_n) aralığı içinde ve dolayısıyla (a, b) aralığında $f^{(n)}(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir c sayısı vardır.

Teorem 1.1.11. (Ara Değer Teoremi)

$f \in C[a, b]$ ve K sayısı $f(a)$ ile $f(b)$ arasında herhangi bir sayı olsun. Buna göre (a, b) aralığında $f(c) = K$ eşitliğini sağlayan bir c sayısı vardır (Bkz. Şekil 1.6).



Şekil 1.6: Ara değer teoremi

Örnek 1.1.12. $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ denkleminin $[0, 1]$ aralığında bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1$ fonksiyonu göz önüne alınsın. f fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında sürekli ve

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{ve} \quad f(1) = 1 > 0$$

eşitliklerini gerçeğe çıkar. Dolayısıyla, Ara Değer Teoremi gereği $0 < x < 1$ aralığındaki bir x sayısı için $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ eşitliği sağlanır.

Alıştırma 1.1.13. $x^5 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$ denkleminin $[0, 2]$ aralığında bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Alıştırma 1.1.14. $x - (\ln x)^x = 0$ denkleminin $[4, 5]$ aralığında bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Alıştırma 1.1.15. $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$ denkleminin çözümlerini içeren aralıkları tespit ediniz.

1.1.3 İntegral

Tanım 1.1.16. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ olmak üzere $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ eşitsizliğini sağlayan $x_0, x_1, \dots, x_n$ sayıları göz önüne alınsın ve $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında herhangi bir z_i sayısı seçilsin. Buna göre $[a, b]$

aralığında f fonksiyonunun **Riemann integrali** aşağıda belirtilen limitin varlığı durumunda

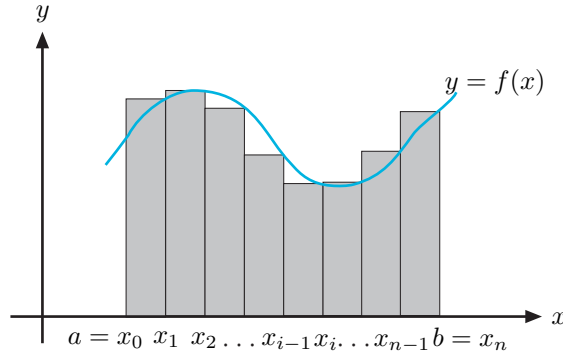
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x_i$$

olarak tanımlanır.

$[a, b]$ aralığında sürekli olan f fonksiyonu aynı zamanda bu aralıkta Riemann integrallenebilirdir. Bu durum, hesapta kolaylık sağlaması bakımından, her $i = 1, 2, \dots, n$ için $[a, b]$ aralığındaki x_i noktalarını eşit aralıklı olarak $z_i = x_i$ şeklinde seçebilmemizi sağlar. Dolayısıyla, $x_i = a + i(b - a)/n$ olmak üzere yukarıda verilen integral tanımı

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

haline dönüşür (Bkz. Şekil 1.7).



Şekil 1.7: Riemann integrali

Teorem 1.1.17. (İntegaller için Ağırlıklı Ortalama Değer Teoremi)

$f \in C[a, b]$, $[a, b]$ üzerinde g fonksiyonunun Riemann integrali mevcut olsun ve bu kapalı aralıkta $g(x)$ işaret değiştirmesin. Buna göre (a, b) aralığında

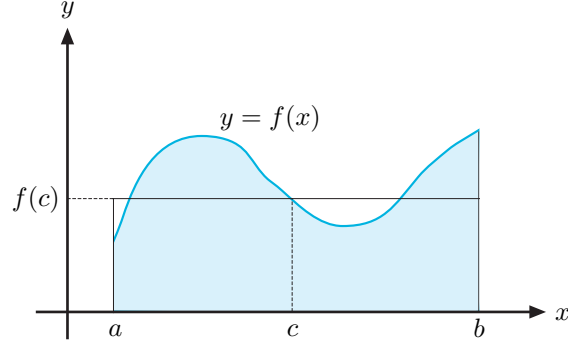
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

eşitliğini sağlayan bir c sayısı vardır.

$g(x) \equiv 1$ olması durumunda Teorem 1.1.17 ifadesi

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

şeklinde ifade edilen ve f fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki **ortalama değerini** veren **İntegaller için Ortalama Değer Teoremi**'ne dönüşür (Bkz. Şekil 1.8).



Şekil 1.8: İntegraller için ortalama değer teoremi

1.1.4 Taylor Polinomları ve Serileri

Bu bölümün son teoremi Taylor polinomlarını ifade eden aşağıdaki teoremdir. Bu tip polinomlar nümerik analizde çokça kullanılırlar.

Teorem 1.1.18. (Taylor Teoremi)

$f \in C^n[a, b]$, $f^{(n+1)}$ türevi $[a, b]$ aralığında mevcut ve $x_0 \in [a, b]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

ve her $x \in [a, b]$ için x_0 ile x arasında bir $\xi(x)$ sayısı

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

olmak üzere

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde mevcuttur.

Yukarıdaki biçimde tanımlanan $P_n(x)$ polinomuna f fonksiyonunun x_0 civarındaki **n . Taylor polinomu** ve $R_n(x)$ ifadesine de $P_n(x)$ ile ilişkili **kalan terim** (ya da **kesme hatası**) adı verilir. Kesme hatasındaki $\xi(x)$ sayısı $P_n(x)$ polinomunun civarında açıldığı x sayısına bağlı olduğundan x 'in bir fonksiyonudur. Taylor Teoremi en basit anlamda bu tip fonksiyonların varlığını ve değerlerinin x ile x_0 arasında olduğunu garantiler. Nümerik analiz konusu içerisindeki en yaygın problemlerden birisi, belirtilen aralık içerisindeki bir x sayısı için $f^{(n+1)}(\xi(x))$ ifadesine ait üst sınırı belirleme problemidir.

$n \rightarrow \infty$ için $P_n(x)$ 'in limitini almakla elde edilen sonsuz seri f fonksiyonunun x_0 civarındaki **Taylor serisi** olarak adlandırılır. $x_0 = 0$ olması durumunda Taylor polinomuna **Maclaurin polinomu** ve Taylor serisine de **Maclaurin serisi** adı verilir.

Taylor polinomundaki **kesme hatası** terimi, sonsuz bir seri toplamına sonlu yaklaşım yapılması sonucu oluşan kesme hatasını içerir.

Örnek 1.1.19. e^x fonksiyonunun $x_0 = 0$ civarında n . Taylor Polinomu $P_n(x)$ ise

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - P_n(x)| \leq 10^{-6}$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük n doğal sayısını bulunuz.

Çözüm. $f(x) = e^x$ fonksiyonunun her mertebeden sürekli türevleri vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}(x) = e^x$ sağlanır. $x_0 = 0$ civarında $f(x)$ fonksiyonunun n . Taylor Polinomu açılımında oluşan hata, $\xi(x)$ sayısı 0 ile x arasında olmak üzere,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-0)^{n+1} \right| = \left| \frac{e^{\xi(x)}}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$$

ifadesi ile verilir. Burada, $0 \leq x \leq 1$ olduğundan $\xi(x)$ sayısı da 0 ile 1 arasında yer alır. Dolayısıyla

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - P_n(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} |R_n(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1} \left| \frac{e^{\xi(x)}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{e}{(n+1)!} \leq 10^{-6}$$

elde edilir. Buradan $e \times 10^6 = 2718281.828 \leq (n+1)!$ eşitsizliğini sağlayan en küçük n sayısının 9 olduğu sonucuna ulaşılır.

Örnek 1.1.20. $f(x) = \cos x$ ve $x_0 = 0$ olsun.

(a) f fonksiyonunun x_0 civarında ikinci Taylor polinomunu; ve

(b) f fonksiyonunun x_0 civarında üçüncü Taylor polinomunu

hesaplayınız.

Çözüm. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ olduğundan Taylor Teoremi her $n \geq 0$ için uygulanabilir. Ayrıca

$$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x \text{ ve } f^{(4)}(x) = \cos x$$

olduğundan

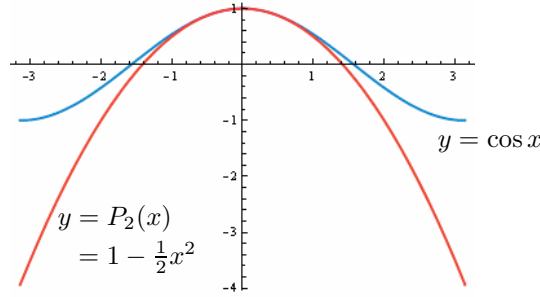
$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1 \text{ ve } f'''(0) = 0$$

elde edilir.

- (a) $n = 2$ ve $x_0 = 0$ için $f(x) = \cos x$ fonksiyonu, $\xi(x)$ sayısı genellikle bilinmeyen 0 ile x arasında bir sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}\cos x &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-0)^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin \xi(x)\end{aligned}$$

şeklinde bir açılıma sahiptir (Bkz. Şekil 1.9).



Şekil 1.9: $y = \cos x$ ve $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ fonksiyonlarının grafikleri

$x = 0.01$ olması durumunda

$$\cos 0.01 = 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 \sin \xi(0.01) = 0.99995 + \frac{10^{-6}}{6} \sin \xi(0.01)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\cos 0.01$ değeri verilen Taylor polinomuyla yapılan yaklaşım ile 0.99995 olarak bulunur. Bu yaklaşımın kesme hatası ya da diğer ismi ile kalan terimi

$$\frac{10^{-6}}{6} \sin \xi(0.01) = 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \sin \xi(0.01)$$

olarak hesaplanır. $\sin \xi(0.01)$ ifadesini hesaplamak mümkün olmamasına karşın sinüs fonksiyonunun tüm değerlerini $[-1, 1]$ aralığında aldığı bilindiğinden $\cos 0.01$ ifadesi için yapılan yaklaşımda oluşan hata

$$|\cos 0.01 - 0.99995| = 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \underbrace{|\sin \xi(0.01)|}_{\leq 1} \leq 0.1\bar{6} \times 10^{-6}$$

sayısı ile sınırlıdır. Buna göre 0.99995 yaklaşık değeri ile $\cos 0.01$ 'in gerçek değerinin en az ilk beş ondalığı aynıdır ve

$$\begin{aligned}0.999948\bar{3} &= 0.99995 - 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \leq \cos 0.01 \\ &\leq 0.99995 + 0.1\bar{6} \times 10^{-6} = 0.9999501\bar{6}\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Gerçekte, hata için bulunan üst sınır gerçek hatadan çok daha büyük olabilir. Bu durum $|\sin \xi(x)|$ için kullanılan sınırın zayıflığından kaynaklanmaktadır. Eğer her $x \in \mathbb{R}$ için $|\sin x| \leq x$ olduğu kullanılırsa $0 \leq \xi(x) < 0.01$ eşitliğinden $|\sin \xi(x)| \leq 0.01$ elde edilir ki bu ise oluşan hata için bir sınırın 0.16×10^{-8} olduğu sonucunu verir.

- (b) $f'''(0) = 0$ olduğundan $\cos x$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ civarında üçüncü Taylor polinomunu kalan terimi ile $0 < \xi(x) < 0.01$ için

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \cos \tilde{\xi}(x)$$

şeklinde elde edilir. (a) şıkında elde edilen $P_2(x)$ polinomu ile $P_3(x)$ polinomu aynı olduğundan $\cos 0.01$ değeri için yapılan yaklaşım yine 0.99995 olarak bulunur. Fakat üçüncü Taylor polinomu kullanılarak yapılan yaklaşımda oluşan hata sınırı, ikinci Taylor polinomu kullanılarak yapılan yaklaşımda oluşan hata sınırından daha küçüktür. Gerçekten, her x değeri için $|\cos x| \leq 1$ olduğu kullanılırsa

$$\left| \frac{1}{24}x^4 \cos \tilde{\xi}(x) \right| \leq \frac{1}{24}(0.01)^4 = 0.41\bar{6} \times 10^{-9}$$

sonucuna ulaşılır. Yani

$$|\cos 0.01 - 0.99995| \leq 0.41\bar{6} \times 10^{-9}$$

ve

$$\begin{aligned} 0.999949999583 &= 0.99995 - 0.41\bar{6} \times 10^{-9} \leq \cos 0.01 \\ &\leq 0.99995 + 0.41\bar{6} \times 10^{-9} = 0.999950000417 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Gerçek değerlerin bilinmemesi durumunda yapılan bir yaklaşımın hassaslığının saptanması, oluşan hatanın üst sınırı ile belirlendiğinden küçük bir üst sınır tespit etmek yaklaşımın güvenilirliğinin ortaya konması bakımından önem taşımaktadır. Zira, bulunan bu üst sınır gerçek hata değerine eşit ya da ondan büyük olacaktır.

Alıştırma 1.1.21. $f(x) = \ln x$ ve $x_0 = 1$ olsun.

- (a) x_0 civarında f fonksiyonunun ikinci Taylor polinomunu kalan terimi ile birlikte hesaplayınız. Bu polinomu kullanarak $\ln 1.1$ için bir yaklaşık değer bulunuz. Yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır hesaplayınız.
- (b) (a) şıkkını üçüncü Taylor polinomu için tekrarlayınız.

Üstel ve trigonometrik fonksiyonlar gibi türevi alınabilen sürekli fonksiyonlar için, sonlu sayıda terim kullanılarak yapılan yaklaşımlar tam doğru bir sonuç vermez. Eklenecek her terim küçük de olsa yaklaşımın iyileşmesine katkıda bulunur. Polinoma sonsuz sayıda terim eklenirse tam doğru sonuç elde edilir.

Örnek 1.1.22. Örnek 1.1.20’de elde edilen üçüncü Taylor polinomunu ve kalan terimini kullanarak

$$\int_0^{0.1} \cos x dx$$

integralini yaklaşık olarak hesaplayınız ve bu yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

Çözüm. Örnek 1.1.20’de elde edilen üçüncü Taylor polinomu hata terimi ile birlikte integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_0^{0.1} \cos x dx &= \int_0^{0.1} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx + \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \cos \tilde{\xi}(x) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{0.1} + \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \cos \tilde{\xi}(x) dx \\ &= 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 + \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \cos \tilde{\xi}(x) dx \end{aligned}$$

yani

$$\int_0^{0.1} \cos x dx \approx 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 = 0.0998\bar{3}$$

elde edilir. Bu hesaptaki hata için bir sınır her x için $|\cos \tilde{\xi}(x)| \leq 1$ eşitliğinin kalan teriminin integralinde kullanılması ile

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \cos \tilde{\xi}(x) dx \right| &\leq \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \underbrace{|\cos \tilde{\xi}(x)|}_{\leq 1} dx \\ &\leq \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 dx = \frac{1}{24} \frac{(0.1)^5}{5} = 8.\bar{3} \times 10^{-8} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. İstenen integralin gerçek değeri

$$\int_0^{0.1} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{0.1} = \sin 0.1 \approx 0.099833416647$$

olduğundan bu yaklaşımdaki gerçek hata

$$|0.099833416647 - 0.0998\bar{3}| = 8.3314 \times 10^{-8}$$

dir ve bu sonuç hata için bulunan üst sınırdan daha küçüktür.

Alıştırma 1.1.23. $x_0 = 1$ civarında $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun kalan terimi ile birlikte üçüncü Taylor polinomunu kullanarak

$$\int_1^{1.1} \ln x dx$$

integralini yaklaşık olarak hesaplayınız ve bu yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

Alıştırma 1.1.24. (a) $x_0 = 0$ civarında $f(x) = e^x \cos x$ fonksiyonunun kalan terimi ile birlikte $P_2(x)$ ikinci Taylor polinomunu yazınız.

(b) $P_2(x)$ polinomunu kullanarak $f(0.5)$ değerine bir yaklaşım yapınız. Ayrıca

$$|f(0.5) - P_2(0.5)|$$

ifadesi için bir üst sınır hesaplayınız ve bulduğunuz bu değeri gerçek hata ile karşılaştırınız.

(c) $[0, 1]$ aralığındaki x değerleri için $|f(x) - P_2(x)|$ ifadesine ait bir üst sınır belirleyiniz.

(d) $\int_0^1 P_2(x)dx$ değerini kullanarak $\int_0^1 f(x)dx$ integrali için bir yaklaşım bulunuz.

(e) (d) şıkında verilen yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

1.2 Yuvarlama Hataları ve Bilgisayar Aritmetiği

Her ne kadar nümerik teknikler analitik çözüme yakın sonuçlar verse de bir yaklaşım içerdiğinden arada bir fark, hata vardır. Temel olarak sayısal hatalar iki türdür. Bunlardan ilki Bölüm 1.1'de anlatılan ve sayısal yöntemlerde, matematik işlemler sonucunda elde edilen gerçek değerleri ifade etmek için kullanılan yaklaşımlar sonucu oluşan farklılıklardan doğan **kesme hataları**dır. Bir diğer hata çeşidi olan **yuvarlama hataları** bilgisayarın büyüklükleri sadece belirli sayıda haneyle gösterebilmesinden kaynaklanır. Örneğin birbirini tekrar etmeyen sonsuz sayıda ondalık kısım içeren π transandant sayısını ifade etmek için bu sayının sonlu sayıda ondalığını içeren bir kısmı göz önüne alındığında yuvarlama hatası yapılmış olur. Bunların dışında insanın kendisinden kaynaklanan, fiziksel veya matematiksel bir modelin oluşturulmasında, işlem yaparken veya program yazarken yapılan veya denklemlerin katsayılarını belirlemek amacı ile yapılan deneylerde ölçümlerde kullanılan aletlerin hassaslığına bağlı olarak oluşan giriş verisi hataları da söz konusudur. Bu tip hatalar müfredat dışıdır.

1.2.1 İki Tabanlı Makine Sayıları

Bilgisayarda tam sayıların ifade edilmesi için kullanılan özel bir yöntem yoktur. Tam sayılar ikili sayı sistemi kullanılarak ifade edilirler. Burada önemli olan bir nokta, sayıların ifade edilmesinde kullanılan bit sayısının, gösterilebilecek maksimum tam sayı değerini kısıtlamasıdır. Örneğin 16 bit kullanılarak yazılabilecek en büyük sayı $2^{16} = 65536$ olmaktadır. Eğer bu 16 bitin bir tanesini işaret için kullanarak sayıyı ifade etmeye kalkarsak $2^{(16-1)} = 32768$ değeri elde edilecektir. Eğer tam sayı gösteriminde işaret biti kullanılıyorsa **işaretli tam sayı** (signed integer), kullanılmıyorsa **işaretsiz tam sayı** (unsigned integer) adını alır. Tam sayı gösteriminde limitler aşılsa **taşma** (overflow, underflow) problemi ile karşılaşılır.

dir. Buna göre bizim orijinal makine sayımız sadece 27.56640625 değerini göstermekle kalmayıp yukarıda verilen kendisinden bir büyük ve bir küçük sayının işaret etmiş olduğu sayılarla sınırlı aralıkta yer alan tüm sayıları göstermektedir.

Bu formatta ifade edilebilecek

(i) en küçük pozitif sayı: $s = 0$, $c = 1$ ve $f = 0$ için

$$2^{-1022}(1 + 0) \approx 0.22251 \times 10^{-307},$$

(ii) en büyük sayı: $s = 0$, $c = 2046$ ve $f = 1 - 2^{-52}$ için

$$2^{1023}(2 - 2^{-52}) \approx 0.17977 \times 10^{309}$$

olduğundan eğer hesaplamalar sonucu elde edilen sayı $2^{-1022}(1 + 0)$ 'den büyük ise aşağı-taşma, $2^{1023}(2 - 2^{-52})$ sayısından büyük ise yukarı-taşma yaşanacağından hesaplamanın belirli bir hassaslık ile yapılmaması durumunda prosedür kesintiye uğrayacaktır. Ayrıca, sıfır sayısı için iki türlü gösterilim vardır: pozitif sıfır için $s = 0$, $c = 0$ ve $f = 0$; negatif sıfır için $s = 1$, $c = 0$ ve $f = 0$.

1.2.2 Ondalık Makine Sayıları

Bu bölümde, her $i = 2, \dots, k$ için $1 \leq d_1 \leq 9$ ve $0 \leq d_i \leq 9$ olmak üzere

$$\pm 0.d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n$$

olarak ifade edilen k -dijit **normalize edilmiş ondalık kayan-nokta formundaki** sayılar ile ilgileceğiz.

Nümerik olarak makinede bir taşmaya neden olmayan, normalize edilmiş pozitif

$$y = 0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} d_{k+2} \dots \times 10^n$$

sayısı göz önüne alınsın. y sayısının kayan nokta formu $fl(y)$ ile gösterilir ve ondalık kısmının sadece k -dijit olarak alınması ile elde edilir. Bu k -dijitin belirlenmesinde genel olarak iki yöntem takip edilir. Bunlardan ilki **kesme** denen ve $d_{k+1} d_{k+2} \dots$ ondalıklarının atılması ile elde edilen

$$fl(y) = 0.d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n$$

sayıdır. Bir diğeri ise **yuvarlama** adı verilen ve $5 \times 10^{n-(k+1)}$ sayısının y 'ye eklenmesi sonrasında kesme yapılması ile elde edilen

$$fl(y) = 0.\delta_1 \delta_2 \dots \delta_k \times 10^n$$

sayıdır. Kısaca yuvarlama yaparken $d_{k+1} \geq 5$ ise $fl(y)$ 'yi elde etmek için d_k sayısına 1 eklenirken (yukarı yuvarlama), $d_{k+1} < 5$ ise k -dijitten sonra kesme yapılır (aşağı yuvarlama). Eğer aşağı yuvarlama yapılıyor ise her $i = 1, 2, \dots, k$ için $\delta_i = d_i$ olur. Bununla beraber, yukarı yuvarlama yapılması durumunda tam kısım da dahil olmak üzere tüm ondalık basamaklar değişebilir.

Sayı	Normalize Edilmiş Ondalık Form
1222000	0.1222×10^7
-0.0000345	-0.345×10^{-4}
0.0027×10^{-3}	0.27×10^{-5}
-3687.487×10^8	$-0.3687487 \times 10^{12}$
0.1001×10^{-5}	0.1001×10^{-5}
$9.26539874 \times 10^{-21}$	$0.926539874 \times 10^{-20}$

Örnek 1.2.2. İrrasyonel π sayısının beş-dijit **(a)** kesme ve **(b)** yuvarlama değerlerini elde ediniz.

Çözüm. $\pi = 3.141592654 \dots$ şeklinde kendini tekrar etmeyen sonsuz ondalığa sahip π sayısı normalize edilerek

$$\pi = 0.3141592654 \dots \times 10^1$$

olarak yazılsın. Buna göre

(a) beş-dijit kesme yapılarak π sayısının kayan-nokta formu

$$fl(\pi) = 0.31415 \times 10^1 = 3.1415,$$

(b) sayının altıncı basamağı 9 olduğundan beş-dijit yuvarlama yapılarak π sayısının kayan-nokta formu

$$fl(\pi) = (0.31415 + 0.00001) \times 10^1 = 3.1416$$

olarak elde edilir.

Tanım 1.2.3. p sayısına bir yaklaşım p^* olsun. Bu durumda $|p - p^*|$ farkına **mutlak hata** ve $p \neq 0$ olmak üzere $\left| \frac{p-p^*}{p} \right|$ oranına ise **bağıl hata** adı verilir.

Örnek 1.2.4. Aşağıda verilen p değerlerine yapılan p^* yaklaşımlarında oluşan mutlak ve bağıl hataları hesaplayınız.

(a) $p = 0.3000 \times 10^1$, $p^* = 0.3100 \times 10^1$;

(b) $p = 0.3000 \times 10^{-3}$, $p^* = 0.3100 \times 10^{-3}$;

(c) $p = 0.3000 \times 10^4$, $p^* = 0.3100 \times 10^4$.

Çözüm.

(a) Mutlak hata: $|p - p^*| = |0.3000 \times 10^1 - 0.3100 \times 10^1| = 0.1$

Bağıl Hata: $\frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{0.1}{0.3000 \times 10^1} = 0.333\bar{3} \times 10^{-1}$;

(b) Mutlak hata: $|p - p^*| = |0.3000 \times 10^{-3} - 0.3100 \times 10^{-3}| = 0.1 \times 10^{-4}$

Bağıl Hata: $\frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{0.1 \times 10^{-4}}{0.3000 \times 10^{-3}} = 0.333\bar{3} \times 10^{-1}$;

- (c) Mutlak hata: $|p - p^*| = |0.3000 \times 10^4 - 0.3100 \times 10^4| = 0.1 \times 10^3$
 Bağıl Hata: $\frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{0.1 \times 10^3}{0.3000 \times 10^4} = 0.333\bar{3} \times 10^{-1}$.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü üzere tüm yaklaşımlarda bağıl hata $0.333\bar{3} \times 10^{-1}$ iken mutlak hata farklı değerler almaktadır. Yapılan yaklaşımda gerçek değere ne oranda yaklaşıldığını ölçmek bakımından bağıl hata mutlak hataya göre daha anlamlıdır. Örneğin 100 km'lik bir yolu 101 km ve 1 km'lik yolu 2 km ölçmede oluşan mutlak hatalar 1 km iken bu ölçümlerin hangisinin daha kabul edilebilir bir hata oranına sahip olduğunu anlamak için bağıl hatalarına bakmak gerekir.

Örnek 1.2.5. (a) $f(x) = \cos x - (x + 1)^2$ fonksiyonunun $x = 0$ civarında üçüncü Taylor polinomunu hata terimini göz ardı ederek hesaplayınız.

- (b) Eğer yukarıda bulunan polinom 5-dijit yuvarlama artimetigi ile $f(0.05)$ değerini hesaplamak için kullanılırsa oluşacak mutlak ve bağıl hatayı tespit ediniz.

Çözüm.

- (a) Hata terimi yazılmayacağından üçüncü Taylor polinomunu hesaplamak için aşağıdaki işlemler yapılır:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - (x + 1)^2, & f(0) &= \cos 0 - (0 + 1)^2 = 0, \\ f'(x) &= -\sin x - 2(x + 1), & f'(0) &= -\sin 0 - 2(0 + 1) = -2, \\ f''(x) &= -\cos x - 2, & f''(0) &= -\cos 0 - 2 = -3, \\ f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= 0. \end{aligned}$$

Buna göre

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x - 0)^3 \\ &= 0 + \frac{-2}{1!}x + \frac{-3}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 \\ &= -2x - \frac{3}{2}x^2 \end{aligned}$$

olarak üçüncü Taylor polinomunu hesaplanır.

- (b) 5-dijit yuvarlama artimetigi kullanılarak yapılan bu yaklaşımda

$$P_3(0.05) = -2(0.05) - \frac{3}{2}(0.05)^2 = -0.10375$$

olarak elde edilir. Buna göre mutlak hata

$$\begin{aligned} |f(0.05) - P_3(0.05)| &= |\cos(0.05) - (0.05 + 1)^2 - (-0.10375)| \\ &= 2.6039 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

ve bağıl hata da

$$\frac{|f(0.05) - P_3(0.05)|}{|f(0.05)|} = \frac{|\cos(0.05) - (0.05 + 1)^2 - (-0.10375)|}{|\cos(0.05) - (0.05 + 1)^2|} = 2.5098 \times 10^{-6}$$

şeklinde bulunur. Mutlak hatanın bağıl hatadan daha küçük çıkmasının nedeni yapılan yaklaşımın gerçek fonksiyon değerine çok yakın olmasıdır.

Tanım 1.2.6.

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 5 \times 10^{-t}$$

eşitsizliğini sağlayan, negatif olmayan en büyük t pozitif tam sayısı için p^* , p 'ye t **anlamli basamakta** bir yaklaşımdır denir.

Verilen bir sayının anlamli basamakları aşağıdaki şekilde tespit edilir:

- Tüm sıfırdan farklı sayılar anlamli basamaktır:
4 sayısının bir anlamli basamağı vardır.
1.3 sayısının iki anlamli basamağı vardır.
320 sayısının iki anlamli basamağı vardır.
4325.334 sayısının yedi anlamli basamağı vardır.
- Tüm anlamli basamaklar arasında kalan sıfırlar anlamli basamaklardır:
109 sayısının üç anlamli basamağı vardır.
3.005 sayısının dört anlamli basamağı vardır.
40.001 sayısının beş anlamli basamağı vardır.
- Ondalık bir sayıda ondalık noktasının sağında yer alan tüm sayılar anlamli basamaklardır:
0.10 sayısının iki anlamli basamağı vardır (ilk sıfır anlamli değildir, fakat sondaki sıfır anlamlidir).
0.0010 sayısının iki anlamli basamağı vardır (sondaki bir ve sıfır).
3.20 sayısının üç anlamli basamağı vardır.
14.3000 sayısının altı anlamli basamağı vardır.
400.00 sayısının beş anlamli basamağı vardır (ondalık noktasının solunda yer alan iki sıfır anlamli olduğu bilinen 4 sayısının sağında olduğundan anlamlidir, ayrıca ondalık noktasının sağında yer alan sıfırlar 4 ile sıfır arasında yer aldığından anlamlidir).

x sayısının k -dijit kayan nokta formu $fl(x)$ ile gösterilsin. $fl(x)$ sayısının yuvarlama aritmetiği kullanılarak elde edilmesi durumunda yaklaşımda oluşan bağıl hatanın bir üst sınırı

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{-k+1}$$

dir. Gerçekten: $d_1 \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere x sayısı

$$x = 0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n$$

şeklinde verilsin.

- $d_{k+1} < 5$ olsun: Bu durumda $fl(x) = 0.d_1d_2 \cdots d_k \times 10^n$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{|x - fl(x)|}{|x|} &= \frac{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n - 0.d_1d_2 \cdots d_k \times 10^n|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots \times 10^{n-k}|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \leq \frac{0.5 \times 10^{-k}}{0.1} = 0.5 \times 10^{-k+1} \end{aligned}$$

bulunur.

- $d_{k+1} \geq 5$ olsun: Bu durumda $fl(x) = (0.d_1d_2 \cdots d_k) \times 10^n - 10^{n-k}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{|x - fl(x)|}{|x|} &= \frac{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n - (0.d_1d_2 \cdots d_k) \times 10^n - 10^{n-k}|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots \times 10^{n-k} - 10^{n-k}|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \\ &= \frac{|(1 - 0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots) \times 10^{n-k}|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \\ &\leq \frac{0.5 \times 10^{-k}}{0.1} = 0.5 \times 10^{-k+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan k -dijit kesme aritmetiği kullanılarak $fl(x)$ sayısının elde edilmesi durumunda oluşacak bağıl hata için bir üst sınır aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} \frac{|x - fl(x)|}{|x|} &= \frac{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n - 0.d_1d_2 \cdots d_k \times 10^n|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots \times 10^{n-k}|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n|} \\ &= \frac{|0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots|}{|0.d_1d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots|} \times 10^{-k}. \end{aligned}$$

Diğer taraftan $d_1 \neq 0$ olduğundan paydanın alabileceği minimum değer 0.1'dir. Ayrıca pay üstten 1 ile sınırlı olduğundan

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{0.1} \times 10^{-k} = 10^{-k+1}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir.

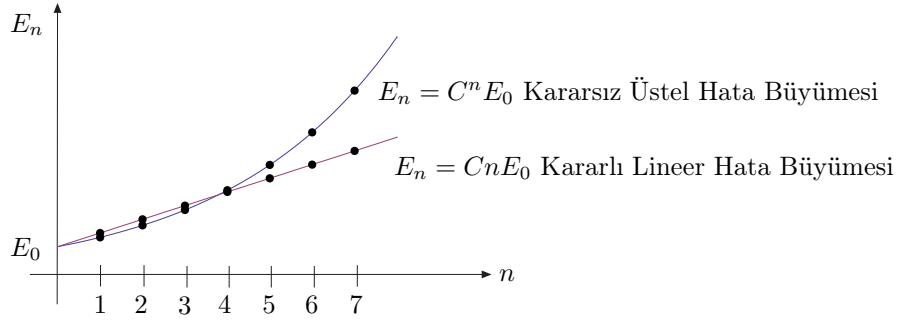
1.3 Yakınsama Kavramı

Tanım 1.3.1. Yapılan bir hesabın herhangi bir adımında oluşan hata $E_0 > 0$ ile, bu adımı takip eden n adım sonrasında oluşan hatanın büyüklüğü ise E_n ile gösterilsin.

- C sayısı n 'den bağımsız bir sabit olmak üzere $E_n \approx CnE_0$ sağlanıyor ise hatanın büyümesi **lineer**dir,
- $C > 1$ olmak üzere $E_n \approx C^n E_0$ sağlanıyor ise hatanın büyümesi **üsteldir**

denir.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere bir algoritmada hatanın lineer büyümesi genellikle kabul edilebilir bir durum iken üstel büyümeye sahip bir algoritma kullanılarak yaklaşımda bulunmaktan kaçınmak gerekir. Dolayısıyla lineer hataya sahip bir yaklaşım **kararlı**, üstel hataya sahip bir yaklaşım ise **kararsız** yapıdadır (Bkz. Şekil1.10).



Şekil 1.10: Üstel ve lineer hatalar

Örnek 1.3.2. c_1 ve c_2 reel sabitler olmak üzere $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi her $n = 0, 1, \dots$ için

$$p_n = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre

- (a) $\{p_n\}$ dizisinin $n = 2, 3, \dots$ için

$$p_n = \frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan rekürsif denklemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

- (b) $p_0 = 1$ ve $p_1 = 1/3$ olarak verilmesi durumunda c_1 ve c_2 sabitlerini tespit ediniz.

- (c) c_1 ve c_2 için (b)'de bulunan değerleri kullanarak p_n ifadesini daha sade bir biçimde ifade ediniz.
- (d) (b)'de verilen p_0 ve p_1 değerlerine karşılık c_1 ve c_2 sabitlerini tespit etmek için beş-dijit yuvarlama algoritması uygulandığında oluşan hatanın karakteristiğini araştırınız.

Çözüm.

- (a) Verilen ifade, denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2} &= \frac{10}{3} \left(c_1 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + c_2 3^{n-1} \right) - \left(c_1 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-2} + c_2 3^{n-2} \right) \\
&= c_1 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-2} \left(\frac{10}{3} \times \frac{1}{3} - 1 \right) + c_2 3^{n-2} \left(\frac{10}{3} \times 3 - 1 \right) \\
&= c_1 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-2} \left(\frac{1}{9} \right) + c_2 3^{n-2} (9) \\
&= c_1 \left(\frac{1}{3} \right)^n + c_2 3^n = p_n.
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre istenen sağlanmış olur.

- (b) $p_0 = 1$ ve $p_1 = \frac{1}{3}$ olsun. Dolayısıyla sabitler

$$\begin{aligned}
p_0 = 1 &\Rightarrow n = 0 : 1 = c_1 + c_2 \\
p_1 = \frac{1}{3} &\Rightarrow n = 1 : \frac{1}{3} = \frac{1}{3}c_1 + 3c_2 \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0
\end{aligned}$$

şeklinde tek türlü belirli olarak elde edilirler.

- (c) Verilen dizi yukarıda bulunan sabit değerleri kullanılarak

$$p_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n = 3^{-n}$$

olarak en sade halde yazılabilir.

- (d) Şimdi dizinin terimlerinin beş-dijit yuvarlama aritmetiği kullanılarak yazıldığını varsayalım. Buna göre $p_0^* = 1.0000$ ve $p_1^* = 0.33333$ 'dür ve bu durumda sabitler $c_1^* = 1.0000$ ve $c_2^* = -0.12500 \times 10^{-5}$ şeklinde elde edilir. Gerçekten:

$$\begin{aligned}
p_0^* = 1.0000 &\Rightarrow n = 0 : 1.0000 = c_1^* + c_2^* \\
p_1^* = 0.33333 &\Rightarrow n = 1 : 0.33333 = \frac{1}{3}c_1^* + 3c_2^*
\end{aligned}$$

olduğundan

$$c_1^* = 1.0000 - c_2^* \Rightarrow 0.33333 = \frac{1}{3}(1.0000 - c_2^*) + 3c_2^* \Rightarrow$$

$$0.33333 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}c_2^* + 3c_2^* \Rightarrow 0.33333 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}c_2^* \Rightarrow$$

$$-0.33333 \times 10^{-5} = \frac{8}{3}c_2^* \Rightarrow c_2^* = -0.12500 \times 10^{-5}$$

ve

$$c_1^* = 1.0000 - (-0.12500 \times 10^{-5}) \Rightarrow c_1^* = 1.0000$$

bulunur. Dolayısıyla rekürsif seri, yeni bulunan katsayılar ile

$$p_n^* = 1.0000 \left(\frac{1}{3}\right)^n + (-0.12500 \times 10^{-5})3^n$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi bu yaklaşımda oluşan (mutlak) hatanın karakteristiğini inceleyelim:

$$|p_n - p_n^*| = \left| 3^{-n} - \left(1.0000 \left(\frac{1}{3}\right)^n + (-0.12500 \times 10^{-5})3^n \right) \right|$$

$$= |3^{-n} - 3^{-n} - (-0.12500 \times 10^{-5}) 3^n|$$

$$= (0.12500 \times 10^{-5}) 3^n$$

olduğundan bu prosedür kararsızdır. Çünkü hata üstel olarak büyümektedir. Aşağıdaki tabloda bazı n değerleri için bu yaklaşımda oluşan bağıl hata gösterilmektedir:

n	Hesaplanan p_n^* Değeri	Gerçek p_n Değeri	Bağıl Hata
0	0.10000×10^1	0.10000×10^1	
1	0.33333×10^0	0.33333×10^0	
2	0.11110×10^0	0.11111×10^0	9×10^{-5}
3	0.37000×10^{-1}	0.37037×10^{-1}	1×10^{-3}
4	0.12230×10^{-1}	0.12346×10^{-1}	9×10^{-3}
5	0.37660×10^{-2}	0.41152×10^{-2}	8×10^{-2}
6	0.32300×10^{-3}	0.13717×10^{-2}	8×10^{-1}
7	-0.26893×10^{-2}	0.45725×10^{-3}	7×10^0
8	-0.92872×10^{-2}	0.15242×10^{-3}	6×10^1

Örnek 1.3.3. c_1 ve c_2 reel sabitler olmak üzere $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi her $n = 0, 1, \dots$ için

$$p_n = c_1 + c_2 n$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre

(a) $\{p_n\}$ dizisinin $n = 2, 3, \dots$ için

$$p_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan rekürsif denklemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

(b) $p_0 = 1$ ve $p_1 = 1/3$ olarak verilmesi durumunda c_1 ve c_2 sabitlerini tespit ediniz.

- (c) c_1 ve c_2 için (b)'de bulunan değerleri kullanarak p_n ifadesini daha sade bir biçimde ifade ediniz.
- (d) (b)'de verilen p_0 ve p_1 değerlerine karşılık c_1 ve c_2 sabitlerini tespit etmek için beş-dijit yuvarlama algoritması uygulandığında oluşan hatanın karakteristiğini araştırınız.

Çözüm.

- (a) Verilen ifade, denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2p_{n-1} - p_{n-2} &= 2(c_1 + c_2(n-1)) - (c_1 + c_2(n-2)) \\ &= 2c_1 + 2nc_2 - 2c_2 - c_1 - nc_2 + 2c_2 \\ &= c_1 + c_2n = p_n \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre istenen sağlanmış olur.

- (b) $p_0 = 1$ ve $p_1 = \frac{1}{3}$ olsun. Dolayısıyla sabitler

$$\begin{aligned} p_0 = 1 &\Rightarrow n = 0 : \quad 1 = c_1 + c_2 \cdot 0 \Rightarrow c_1 = 1, \\ p_1 = \frac{1}{3} &\Rightarrow n = 1 : \quad \frac{1}{3} = c_1 + c_2 \cdot 1 = 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

şeklinde tek türlü belirli olarak elde edilirler.

- (c) Verilen dizi yukarıda bulunan sabit değerleri kullanılarak

$$p_n = 1 - \frac{2}{3}n.$$

olarak en sade halde yazılabilir.

- (d) Şimdi dizinin terimlerinin beş-dijit yuvarlama aritmetiği kullanılarak yazıldığını varsayalım. Buna göre $p_0^* = 1.0000$ ve $p_1^* = 0.33333$ 'dür ve bu durumda sabitler $c_1^* = 1.0000$ ve $c_2^* = -0.66667$ şeklinde elde edilir. Gerçekten:

$$\begin{aligned} p_0^* = 1.0000 &\Rightarrow n = 0 : \quad 1.0000 = c_1^* + c_2^* \cdot 0 = c_1^* \Rightarrow c_1^* = 1.0000 \\ p_1^* = 0.33333 &\Rightarrow n = 1 : \quad 0.33333 = c_1^* + c_2^* \cdot 1 = c_1^* + c_2^* \Rightarrow c_2^* = -0.66667 \end{aligned}$$

olduğundan

$$p_n^* = 1.0000 + (-0.66667)n$$

elde edilir.

Şimdi bu yaklaşımda oluşan (mutlak) hatanın karakteristiğini inceleyelim:

$$\begin{aligned} |p_n - p_n^*| &= \left| 1 - \frac{2}{3}n - (1.0000 + (-0.66667)n) \right| \\ &= \left| 1 - \frac{2}{3}n - 1 + 0.66667 \cdot n \right| \\ &= \left(0.66667 - \frac{2}{3} \right) n \end{aligned}$$

olduğundan bu prosedür kararlıdır. Çünkü hata lineer olarak büyümektedir. Aşağıdaki tabloda bazı n değerleri için bu yaklaşımda oluşan bağıl hata gösterilmektedir:

n	Hesaplanan p_n^* Değeri	Gerçek p_n Değeri	Bağıl Hata
0	0.10000×10^1	0.10000×10^1	
1	0.33333×10^0	0.33333×10^0	
2	-0.33330×10^0	-0.33333×10^0	9×10^{-5}
3	-0.10000×10^1	-0.10000×10^1	0
4	-0.16670×10^1	-0.16667×10^1	0
5	-0.23334×10^1	-0.23333×10^1	4×10^{-5}
6	-0.30000×10^1	-0.30000×10^1	0
7	-0.36667×10^1	-0.36667×10^1	0
8	-0.43334×10^1	-0.43333×10^1	2×10^{-5}

1.3.1 Yakınsama Hızı

İterasyon teknikleri kullanılarak yapılan yaklaşımlarda genellikle diziler kullanıldığından, bu bölümde bazı tanımlar verilerek dizilerin yakınsama hızı üzerinde durulacaktır.

Tanım 1.3.4. $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sıfıra, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi herhangi bir α sayısına yakınsasın. Yeterince büyük n değerleri için

$$|\alpha_n - \alpha| \leq K|\beta_n|$$

eşitsizliğini sağlayan bir K sayısı varsa, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi α 'ya $O(\beta_n)$ **hızında yakınsar** denir ve $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$ yazılır.

Tanım 1.3.4'e göre $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi istenen özelliği sağlayan herhangi bir $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ile karşılaştırılabilir olsa da biz hemen her durumda $p > 0$ için

$$\beta_n = \frac{1}{n^p}$$

formundaki dizileri göz önüne alacağız ve en büyük p değeri ile ilgileneceğiz. Burada $\alpha_n = \alpha + O(1/n^p)$ 'dir.

Örnek 1.3.5. $n \geq 1$ için

$$\alpha_n = \frac{n+1}{n^2} \text{ ve } \hat{\alpha}_n = \frac{n+3}{n^3}$$

şeklinde tanımlanan iki dizi göz önüne alınsın. Her ne kadar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\alpha}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^3} = 0$$

sağlansa da $\{\hat{\alpha}_n\}$ dizisi limit değerine $\{\alpha_n\}$ dizine göre daha hızlı yakınsar. Gerçekten, beş-dijit yuvarlama aritmetiği kullanılarak aşağıdaki değerler elde

edilir:

n	1	2	3	4	5	6	7
α_n	2.0000	0.75000	0.44444	0.31250	0.24000	0.19444	0.16327
$\hat{\alpha}_n$	4.0000	0.62500	0.22222	0.10938	0.064000	0.041667	0.029155

Yukarıdaki şekilde tanımlanan her iki dizinin de yakınsama hızını tespit ediniz.

Çözüm. $\beta_n = 1/n$ ve $\hat{\beta}_n = 1/n^2$ olarak tanımlansın.

$$|\alpha_n - 0| = \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n} = 2\beta_n$$

ve

$$|\hat{\alpha}_n - 0| = \frac{n+3}{n^3} \leq \frac{n+3n}{n^3} = 4 \cdot \frac{1}{n^2} = 4\hat{\beta}_n$$

olduğundan $\{\alpha_n\}$ dizisi sıfıra $\{1/n\}$ 'nin sıfıra yakınsama hızında yakınsarken $\{\hat{\alpha}_n\}$ dizisi aynı değere daha hızlı olarak $\{1/n^2\}$ 'nin sıfıra yakınsama hızında yakınsar. Buna göre

$$\alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{ve} \quad \hat{\alpha}_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

yazılabilir.

O notasyonu ayrıca fonksiyonların yakınsama hızlarını belirtmek için de kullanılır.

Tanım 1.3.6. $\lim_{h \rightarrow 0} G(h) = 0$ ve $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = L$ olsun. Eğer yeterince küçük h değerleri için

$$|F(h) - L| \leq K|G(h)|$$

eşitsizliğini sağlayan bir K sayısı varsa $F(h)$ fonksiyonu L 'ye $O(G(h))$ hızında yakınsar denir ve $F(h) = L + O(G(h))$ yazılır.

Bu derste karşılaştırmada kullanılan $G(h)$ fonksiyonu $p > 0$ olmak üzere $G(h) = h^p$ formunda alınacaktır. Dolayısıyla $F(h) = L + O(h^p)$ eşitliğini sağlayan en büyük p değeri ile ilgilenecektir.

Örnek 1.3.7. Kosinüs fonksiyonunun $h = 0$ civarında üçüncü Taylor polinomu hata terimi ile birlikte göz önüne alarak

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Örnek 1.1.20'dan $\xi(h)$ sayısı 0 ile h arasında olmak üzere

$$\cos h = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 \cos \xi(h)$$

şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. Buna göre

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 - 1 = \frac{1}{24}h^4 \cos \xi(h)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\left| \left(\cos h + \frac{1}{2}h^2 \right) - 1 \right| = \left| \frac{1}{24} \cos \xi(h) \right| h^4 \leq \frac{1}{24}h^4$$

bulunur. Yani, $h \rightarrow 0$ için $\cos h + \frac{1}{2}h^2$ ifadesinin 1 limit değerine h^4 'ün 0'a yakınsama hızında yakınsadığı sonucu elde edilir. Bu ise

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

demektir.

Soru 2.

14 puan

$n \geq 1$ için

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{1+2n^2}}{3n}$$

dizisinin yakınsama hızını tespit ediniz.

Cevap. Verilen $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+2n^2}}{3n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2n^2}{9n^2}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = \alpha$$

olarak bulunur. Buna göre $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \alpha| &= \left| \frac{\sqrt{1+2n^2}}{3n} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right| = \left| \frac{\sqrt{1+2n^2} - n\sqrt{2}}{3n} \left(\frac{\sqrt{1+2n^2} + n\sqrt{2}}{\sqrt{1+2n^2} + n\sqrt{2}} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1+2n^2 - 2n^2}{3n(\sqrt{1+2n^2} + n\sqrt{2})} \right| = \left| \frac{1}{3n(\sqrt{1+2n^2} + n\sqrt{2})} \right| \leq \left| \frac{1}{3n(\sqrt{0+2n^2} + n\sqrt{2})} \right| \end{aligned}$$

olduğundan

$$|\alpha_n - \alpha| \leq \left| \frac{1}{3n(\sqrt{1+2n^2} + n\sqrt{2})} \right| = \underbrace{\frac{1}{6\sqrt{2}}}_K \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\beta_n}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{\sqrt{1+2n^2}}{3n} = \frac{\sqrt{2}}{3} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

dir. Yani, $\{\alpha_n\}$ dizisi $\sqrt{2}/3$ limit değerine $\{1/n^2\}$ 'nin sıfıra yakınsama hızında yakınsar.

Büyük O-notasyonu

$$\exists k > 0, |f_n| \leq k \cdot \frac{1}{n^\alpha} \Leftrightarrow f_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$