

## 2 Tek Değişkenli Denklemlerin Çözümleri

Bu bölümde nümerik yaklaşımın en temel uğraşlarından birisi olan **kök bulma problemi** üzerinde durulacaktır. Bu süreçte verilen bir  $f$  fonksiyonu için  $f(x) = 0$  eşitliğini sağlayan ve denklemin **kökü**, **çözümü** ya da **sıfır yeri** olarak adlandırılan reel  $x$  sayılarına çeşitli metodlar kullanılarak yaklaşımlarda bulunulacaktır.

### 2.1 İkiye Bölme Metodu

Kök bulma problemi incelenirken göz önüne alınacak ilk teknik temel olarak Ara Değer Teoremi kullanılarak elde edilen **İkiye Bölme Metodudur**.

$f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer  $f(a)$  ve  $f(b)$  değerlerinin işaretleri farklı ise Ara Değer Teoremi'ne göre  $(a, b)$  aralığında  $f(p) = 0$  eşitliğini sağlayacak şekilde bir  $p$  sayısı vardır. Bu prosedür her ne kadar verilen aralıkta birden fazla kök olması durumunda da kullanışlı olsa dahi biz kolaylık sağlaması bakımından  $(a, b)$  aralığında  $f$  fonksiyonunun tek türlü belirli bir kökü olduğunu varsayacağız.

İkiye bölme yöntemi  $f(a)f(b) < 0$  olmak üzere,  $[a, b]$  aralığını ikiye bölmek sureti ile parçalayarak her bir adımda kökün yer aldığı alt aralığın tespit edilmesi olgusuna dayanır.

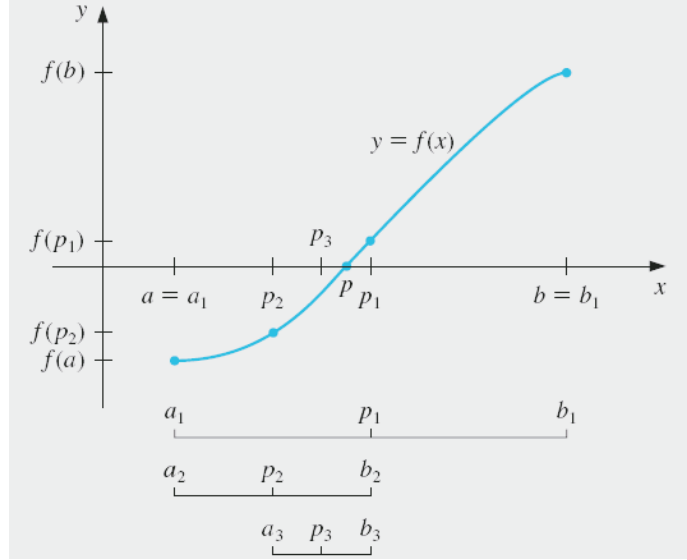
$a_1 = a$ ,  $b_1 = b$  olmak üzere  $[a, b]$  aralığının orta noktası olan

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

noktası göz önüne alınsın:

- Eğer  $f(p_1) = 0$  ise  $p = p_1$  verilen denklemin köküdür.
- Eğer  $f(p_1) \neq 0$  ise  $f(p_1)$  değeri ya  $f(a_1)$  ya da  $f(b_1)$  ile aynı işaretlidir.
  - Eğer  $f(p_1)$  ile  $f(a_1)$  aynı işaretli ise  $p \in (p_1, b_1)$  dir. Bu durumda  $a_2 = p_1$  ve  $b_2 = b_1$  alınır.
  - Eğer  $f(p_1)$  ile  $f(a_1)$  farklı işaretli ise  $p \in (a_1, p_1)$  dir. Bu durumda  $a_2 = a_1$  ve  $b_2 = p_1$  alınır.

Daha sonra verilen denklemin bir kökünü barındırdığı bilinen  $[a_2, b_2]$  aralığının orta noktası yukarıda anlatıldığı şekilde tespit edilip aynı prosedür uygulanarak kök değeri verilen bir  $\varepsilon$  hassaslık değeri ile belirlenir (Bkz Şekil 2.1).



Şekil 2.1: İkiye bölme metodu

Yukarıda anlatılan prosedür sonlu sayıda tekrarlandıktan sonra bulunan değer, gerçek kök değerine bir yaklaşım olarak elde edilir. Dolayısıyla durma kriteri dediğimiz bir tolerans değerinin sağlandığını, yani yapılan yaklaşımın istediğimiz  $\varepsilon$  hassaslığında olduğunu kontrol edilmesi gerekir. Örneğin, bir  $\varepsilon$  değeri verildiğinde  $p_1, p_2, \dots, p_k$  her bir adımda kök değerine yapılan yaklaşımlar olmak üzere  $n = 1, 2, \dots, k$  için

$$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon, \quad (2.1)$$

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon, \quad p_n \neq 0 \quad (2.2)$$

veya

$$|f(p_n)| < \varepsilon \quad (2.3)$$

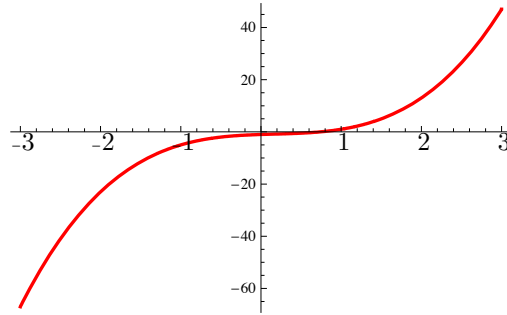
eşitsizliklerinden herhangi biri sağlandığında yapılan yaklaşımın istenen hassaslıkta olduğu kabul edilebilir. Bununla birlikte yukarıda verilen durma kriterlerinin kullanımında bazı zorluklar ortaya çıkmaktadır: Örneğin, öyle  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  dizileri vardır ki  $p_n - p_{n-1}$  farkı sıfıra yakınsamasına karşın dizinin kendisi ıraksaktır. Diğer tarafta,  $f(p_n)$  değeri sıfıra çok yakınken  $p_n$  ifadesi verilen aralıktaki gerçek kök değeri  $p$ 'den çok farklı olabilir. Eğer  $f$  ya da  $p$  hakkında herhangi bir bilgi verilmemişse (2.2) eşitsizliğini kullanmak oranın bağıl hatayı test etmeye yakın sonuçlar vereceğinden en uygun durma kriteridir.

İkiye bölme algoritması kullanılarak bir yaklaşım yapılmak istendiğinde öncelikle  $f(a)f(b) < 0$  eşitsizliğini sağlayacak  $[a, b]$  aralığının tespit edilmesi gerekir. Her bir adımda, bulunan bu aralık ikiye bölünerek kökü barındıran alt

aralık tayin edildiğinden,  $[a, b]$  başlangıç aralığının küçük olması avantajlı bir durumdur. Örneğin  $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$  fonksiyonu göz önüne alınsın (Bkz. Şekil 2.2).

$$f(-4)f(4) < 0 \text{ ve } f(0)f(1) < 0$$

olmasına karşın  $f$  fonksiyonunun bir kökünü barındıran  $[a, b]$  aralığını  $[-4, 4]$  yerine  $[0, 1]$  şeklinde almak işlem yükü açısından daha mantıklıdır.



Şekil 2.2:  $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$  fonksiyonunun grafiği

Aşağıdaki örnek ikiye bölme metodunun ne şekilde işletildiğine dair bir uygulama olarak verilmektedir. Bu örnekte bağıl hata sınırının  $0.0001$ 'den küçük olduğu bir yaklaşım yapılmakta ve bu yaklaşımı elde etmek için

$$\frac{|p - p_n|}{|p|} < 10^{-4}$$

eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığına bakılmaktadır.

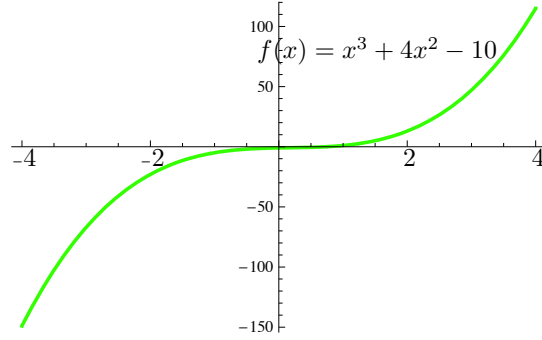
**Örnek 2.1.1.**  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  denkleminin  $[1, 2]$  aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz ve ikiye bölme metodunu kullanarak bu aralıktaki köke en az  $10^{-4}$  hassaslıkla bir yaklaşımda bulununuz.

*Çözüm.*  $f(1) = -5 < 0$  ve  $f(2) = 14 > 0$  olduğundan Teorem 1.1.8 ile verilen Ara Değer Teoremi'ne göre sürekli  $f(x)$  fonksiyonunun verilen aralıkta en az bir kökü vardır.

İkiye bölme metodunun ilk adımında  $[1, 2]$  aralığının orta noktası  $1.5$  değeri göz önüne alınır.  $f(1.5) = 2.375 > 0$  olduğundan kökün  $[1, 1.5]$  aralığında yer aldığı sonucu elde edilir. Dolayısıyla yeni aralığımız  $[1, 1.5]$  olarak tespit edilir. Bu aralığın orta noktası  $1.25$  değeri için  $f(1.25) = -1.796875 < 0$  olduğundan kök değerinin  $[1.25, 1.5]$  aralığında yer aldığı sonucu elde edilir.  $[1.25, 1.5]$  aralığının orta noktası  $1.375$  değeri için  $f(1.375) = 0.16211 > 0$  olduğundan verilen denkleme ait kökün  $[1, 1.375]$  aralığında yer aldığı sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde hareket ederek aşağıdaki tablo elde edilir:

| $n$ | $a_n$       | $p_n$       | $b_n$       | $f(p_n)$         |
|-----|-------------|-------------|-------------|------------------|
| 1   | 1.0         | 1.5         | 2.0         | 2.375            |
| 2   | 1.0         | 1.25        | 1.5         | -1.796875        |
| 3   | 1.25        | 1.375       | 1.5         | 0.162109375      |
| 4   | 1.25        | 1.3125      | 1.375       | -0.8483886719    |
| 5   | 1.3125      | 1.34375     | 1.375       | -0.350982666     |
| 6   | 1.34375     | 1.359375    | 1.375       | -0.09640884399   |
| 7   | 1.359375    | 1.3671875   | 1.375       | 0.03235578537    |
| 8   | 1.359375    | 1.36328125  | 1.3671875   | -0.03214997053   |
| 9   | 1.36328125  | 1.365234375 | 1.3671875   | 0.00007202476263 |
| 10  | 1.36328125  | 1.364257813 | 1.365234375 | -0.01604669075   |
| 11  | 1.364257813 | 1.364746094 | 1.365234375 | -0.007989262813  |
| 12  | 1.364746094 | 1.364990234 | 1.365234375 | -0.003959101523  |
| 13  | 1.364990234 | 1.365112305 | 1.365234375 | -0.00194365901   |

Şekil 2.3’de  $f(x)$  fonksiyonunun  $x$  eksenini kestiği nokta, yani sıfır yeri gösterilmektedir.



Şekil 2.3:  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$  fonksiyonun grafiği

Tablodan görüldüğü üzere 13 iterasyon sonucunda  $p$  köküne bir yaklaşım 1.365112305 olarak elde edilmiştir. Bu yaklaşımda oluşan mutlak hata için bir sınır

$$|p - p_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |1.365234375 - 1.365112305| = 0.000122070$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan  $|a_{14}| < |p|$  olduğundan istenen durma kriteri kullanılarak

$$\frac{|p - p_{13}|}{|p|} < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} < \frac{0.000122070}{1.365112305} = 0.8942121432 \times 10^{-4}$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre yapılan yaklaşımın hassaslığının en az  $10^{-4}$  olduğu görülür. Aslında dokuz ondalık basamak ile aranan kökün gerçek değeri  $p = 1.365230013$ ’tür. Bu durumda  $p_9$  yaklaşımı  $p_{13}$ ’den daha iyi bir yaklaşımdır.

Bu olgu  $|f(p_9)| < |f(p_{13})|$  olmasından sezilmekle birlikte gerçek kök değerinin ne olduğu bilinmeden kesin bir yargıya varmak doğru olmaz.

İkiye bölme metodu konsept olarak her ne kadar kolay anlaşılır olsa da önemli dezavantajları vardır.  $|p - p_n|$  farkının çok küçük olmasını sağlayacak  $n$  iterasyon sayısı kimi zaman çok büyük bir sayı olabilir. Buna göre gerçek kök değerine yakınsaması yavaştır. Fakat, metot kesinlikle kök değerine yakınsar. Yani, eğer verilen fonksiyon sürekli ise bu metot kullanılarak sıfır yerine bir yaklaşımda bulunmak her zaman mümkündür. Dolayısıyla yakınsaması daha hızlı metotlara geçmeden önce ikiye bölme metodunu incelemek bir başlangıç olarak önemlidir.

**Örnek 2.1.2.** İkiye bölme metodunu kullanarak  $\varepsilon = 10^{-3}$  hassaslıkla  $\sqrt{3}$  değerine bir yaklaşımda bulununuz.

*Çözüm.* Öncelikle metot verilen bir fonksiyonun köklerinin bulunması için kullanıldığından kökü  $\sqrt{3}$  olan bir fonksiyon tanımlamak gerekir. Tüm olası seçimler içerisinde söz konusu fonksiyonu kolaylık sağlaması bakımından  $f(x) = x^2 - 3$  olarak tanımlayıp pozitif kökünü göz önüne alalım. Şimdi  $f$  fonksiyonunun bu kökünü barındıran bir  $[a, b]$  aralığı bulalım:

$$f(a) = f(1.7) = -0.11 < 0 \text{ ve } f(b) = f(1.8) = 0.24 > 0$$

olduğundan Ara Değer Teoremi'ne göre  $[a, b] = [1.7, 1.8]$  aralığında  $f(x) = x^2 - 3$  fonksiyonunun bir kökü vardır. Diğer bir değişle  $\sqrt{3}$  değeri  $(1.7, 1.8)$  aralığında yer alır. Buna göre aşağıdaki tablo elde edilir:

| $n$ | $a_n$   | $p_n$      | $b_n$     | $f(p_n)$                       |
|-----|---------|------------|-----------|--------------------------------|
| 1   | 1.7     | 1.75       | 1.8       | $0.625 \times 10^{-1}$         |
| 2   | 1.7     | 1.725      | 1.75      | $-0.24375 \times 10^{-1}$      |
| 3   | 1.725   | 1.7375     | 1.75      | $0.1890625 \times 10^{-1}$     |
| 4   | 1.725   | 1.73125    | 1.7375    | $-0.27734375 \times 10^{-2}$   |
| 5   | 1.73125 | 1.734375   | 1.7375    | $0.8056640625 \times 10^{-2}$  |
| 6   | 1.73125 | 1.7328125  | 1.734375  | $0.2639160156 \times 10^{-1}$  |
| 7   | 1.73125 | 1.73203125 | 1.7328125 | $-0.6774902344 \times 10^{-4}$ |

Dolayısıyla  $|f(p_7)| = 0.6774902344 \times 10^{-4} < 10^{-3}$  olduğundan verilen hassaslık değeri ile aranan kök  $p \approx p_7 = 1.73203125$  şeklinde elde edilir.

**Örnek 2.1.3.** (a)  $f(x) = e^{-x} - \sin x$  fonksiyonunun kökünü barındıran bir aralık tespit ediniz.

(b) Yukarıda tespit ettiğiniz aralıktaki köke ikiye bölme metodunun ilk 4 adımını gerçekleyerek bir yaklaşımda bulununuz.

*Çözüm.*

(a) Her yerde sürekli  $f(x)$  fonksiyonu Ara Değer Teoremi'nin koşulunu sağladığından reel sayılar içinde  $a < b$  eşitsizliğini sağlayan bir  $a, b$  sayı çiftini

$f(a)f(b) < 0$  ifadesini gerçekleyecek şekilde bulmak yeterlidir. Burada  $a = 0$  ve  $b = 1$  olarak göz önüne alınırsa

$$f(a) = f(0) = e^0 - \sin 0 = 1 > 0$$

ve

$$f(b) = f(1) = e^{-1} - \sin 1 = -0.47359 < 0$$

olduğundan  $f(0)f(1) < 0$  koşulu sağlanır. Bu ise Ara Değer Teoremi'ne göre  $[0, 1]$  aralığında  $f(x) = e^{-x} - \sin x$  fonksiyonunun bir kökünün olduğu anlamına gelir.

|     | $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $p_n$  | $f(p_n)$  |
|-----|-----|-------|-------|--------|-----------|
|     | 1   | 0     | 1     | 0.5    | 0.12711   |
| (b) | 2   | 0.5   | 1     | 0.75   | -0.20927  |
|     | 3   | 0.5   | 0.75  | 0.625  | -0.049836 |
|     | 4   | 0.5   | 0.625 | 0.5625 | 0.036480  |

Buna göre aranan kök  $10^{-1}$  hassaslık ile  $p \approx p_4 = 0.5625$  olarak bulunur.

**Teorem 2.1.4.**  $f \in C[a, b]$  ve  $f(a)f(b) < 0$  olsun. Bu durumda ikiye bölme metodu ile elde edilen  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi  $f$  fonksiyonunun verilen aralıktaki  $p$  köküne yakınsar ve  $n \geq 1$  için

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

eşitsizliği sağlanır.

*Kanıt.* Her  $n \geq 1$  için  $p \in (a_n, b_n)$  ve

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a)$$

dır. Ayrıca,  $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$  olduğundan

$$|p_n - p| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b - a}{2^n} \quad (n \geq 1)$$

elde edilir. □

İkiye bölme metodunda

$$|p_n - p| \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$$

olduğundan  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi  $p$  köküne  $O\left(\frac{1}{2^n}\right)$  hızında yakınsar. Yani

$$p_n = p + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

dır.

Burada dikkat edilmesi gereken bir husus Teorem 2.1.4'ün yapılan yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirlememize yardımcı olduğudur. Bazı durumlarda bu üst sınır gerçek hatadan çok büyük olabilir. Örneğin Örnek 2.1.1'de dokuzuncu yaklaşım için

$$|p - p_9| \leq \frac{2 - 1}{2^9} = 1.953125 \times 10^{-3}$$

iken aslında gerçek hata değeri

$$|p - p_9| = |1.365230013 - 1.365234375| = 4.362 \times 10^{-6}$$

olarak tespit edilir.

**Örnek 2.1.5.**  $a = a_1 = 1$ ,  $b = b_1 = 2$  olmak üzere  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  denkleminde en az  $10^{-3}$  hassaslıkla bir yaklaşım ikiye bölme metodu kullanılarak yapılmak istendiğinde oluşacak iterasyon sayısını hesaplayınız.

*Çözüm.*  $n$  iterasyon sayısını göstermek üzere

$$|p_n - p| \leq 2^{-n}(b - a) = 2^{-n} < 10^{-3}$$

eşitsizliğini gerçekleyecek olan  $n$  sayısını tespit etmek gerekir. Buna göre 10 tabanında gerekli logaritma işlemleri yapılırsa  $-n \log 2 < -3 \log 10$  yani

$$n > \frac{3}{\log 2} = 9.965784285$$

elde edilir. İterasyon sayısı yukarıda tespit edilen değerden büyük en yakın tam sayı olduğundan on iterasyon sonucunda en az  $10^{-3}$  hassaslık ile bir yaklaşım yapılmış olunacağı sonucuna ulaşılır. Gerçekten Örnek 2.1.1'de elde edilen tabloda  $p_{10} = 1.364257813$  olduğundan oluşan gerçek hata

$$|1.365230013 - 1.364257813| = 0.9722 \times 10^{-3} < 10^{-3}$$

olup verilen üst sınırı geçmez. Burada tekrar belirtmek gerekir ki yukarıdaki şekilde bulunan  $n$  iterasyon sayısı bazı durumlarda verilen hassaslık değeri ile bir yaklaşımda bulunmak için yapılması gereken iterasyon sayısından çok daha fazla olabilir.

## 2.2 Sabit Nokta İterasyonu

Bir fonksiyonun sabit noktaları, fonksiyon altındaki görüntüsü yine kendi değerine eşit olan noktalarıdır.

**Tanım 2.2.1.** Bir  $g$  fonksiyonu verilsin.  $g(p) = p$  eşitliğini sağlayan bir noktaya  $g$  fonksiyonunun **sabit noktası** denir.

Bu bölümde sabit nokta problemine bir çözümün ne şekilde bulunacağı ve sabit nokta problemi ile kök bulma problemi arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Aşağıda anlatıldığı anlamda kök bulma problemi ile sabit nokta problemi birbirine denk sınıflardır: