

2. PARÇACIK KİNEMATİĞİ

→ Kinematik analiz, cismin hareketine sebep olan etkileri düşünmeye gerek yok, yalnızca ortaya çıkan hareketin geometrisiyle ilgilenir.

→ Kinematik bazı mühendislik uygulamaları, istenen belirli hareketleri kontrol etmek veya üretmek için kamların, dişlilerin, bağlantıların ve diğer makine elemanlarının tasarımını ve uçaklar, roketler ve uzay araçları için uçuş yörüngelerinin hesaplamasını içermektedir. Tam bir kinematik bilgisi, hareket ve harekete neden olan veya etkili eden kuvvetler arasındaki ilişkileri inceleyen kinetiğin ön şartıdır.

→ Kinematik analiz, cismin verilen herhangi bir andaki

1. Konum ($\vec{r}$)

2. Yer değiştirme ($\Delta\vec{r}$, $d\vec{r}$)

3. Hız ($\vec{v}$)

4. İvme ($\vec{a}$)

kinematik büyüklüklerinin belirlenmesi olarak tanımlanır ve kinematik büyüklükler, vektörel büyüklüklerdir.

→ Parçacık olarak modellenen cisimlerin hareketlerinin kinematik analizi bu bölümün konusunu oluşturmaktadır.

→ Cismin hareketi, kütle merkezinin hareketiyle ifade edilebilir ve herhangi bir dönme hareketi ihmal edilebiliyorsa, bu cisimler parçacık (veya maddesel nokta) olarak modellenenebilir.

→ Buna göre, paracık yalnızca ötelenme (ilerleme) hareketi yapar. Paracık bir temas düzlemi üzerinde ise bu ötelenme hareketi "kayarak ötelenme" veya "sürünme" olarak da tanımlanır.

→ Bir paracığın hareketi pek çok şekilde tanımlanabilir ve en kullanışlı veya uygun seçim büyük oranda tecrübeye ve verilerin nasıl verildiğine bağlıdır.

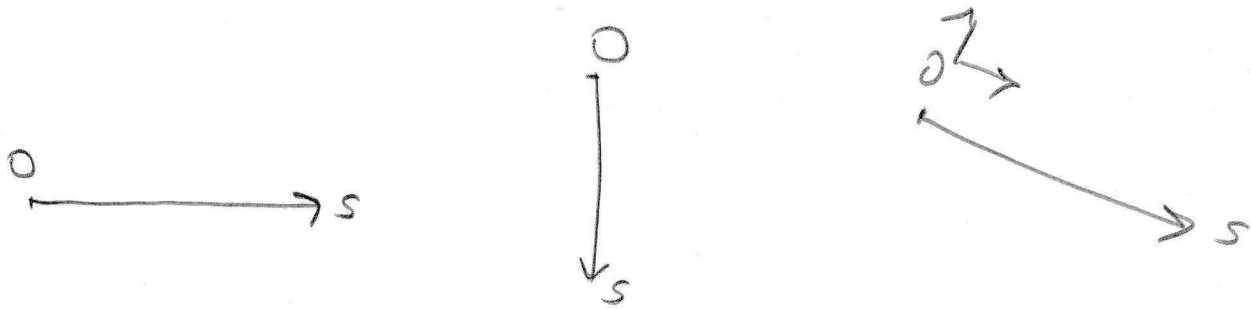
→ Eğer paracık sabit bir tel boyunca kayan bir boncuk gibi belirli bir yöne mecbursa, hareketin sınırlandırılmış olduğu söylenir.

→ Eğer fiziksel yönlendiriciler yoksa hareketin sınırlandırılmamış olduğu söylenir. Bir zincirin ucuna bağlı ve bir dairede dönen küçük bir taş zincir kırılana kadar sınırlandırılmış hareket yapmaktadır, bu andan sonra ise hareketi serbesttir.

→ Her durumda paracığın hareketi sırasında izlediği yola yörünge denir.

→ Bir paracık doğrusal ya da eğrisel bir yörünge üzerinde hareket edebilir.

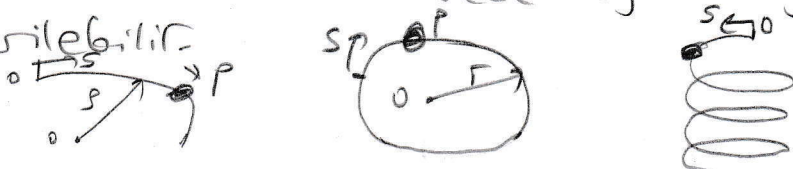
→ Doğrusal yörünge bir doğru zehindedir ve bir boyutlu hareketi temsil eder. Cismin aldığı yol s olmak üzere doğrusal yörünge aşağıdaki gibi gösterilebilir.



→ Eğik yörünge de bir doğru zehindedir ancak en az iki boyutlu hareketi temsil eder ve cismin aldığı yol s olmak üzere aşağıdaki gibi gösterilebilir.



→ Eğrisel yörünge herhangi bir eğri zehindedir ve en az iki boyutlu hareketi temsil eder. Cismin aldığı yol s olmak üzere bu bölümde incelenecek eğrisel yörüngeler aşağıdaki gibi gösterilebilir.



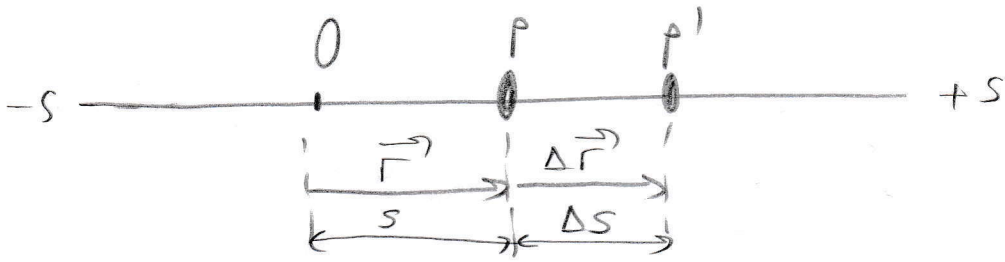
→ Bir P paracığının herhangi bir t anındaki konumu, (x, y, z) Kartezyen koordinatları, (r, θ, z) silindirik koordinatları veya (R, θ, ϕ) küresel koordinatları belirtilebilir tanımlanabilir.

→ P paracığının hareketi ayrıca, eğriye teğet (t) ve normal (n) vektörleri ile doğal koordinatlarda tanımlanabilir.

→ Paracıkların (veya rijit cisimlerin) hareketi, sabit referans eksenlerden (mutlak hareket analizi) ölçülen koordinatları kullanılarak veya hareketli referans eksenlerden (izafi hareket analizi) ölçülen koordinatları kullanılarak tanımlanabilir. Her iki tanımlama da geliştirilecek veya izleyen konularda uygulanacaktır.

2.1. Doğrusal Hareket

→ Doğrusal hareket yapan P paracığı şekilde verildiği gibi düz bir hat boyunca hareket eder.



→ Herhangi bir t anında P 'nin konumu, hat üzerindeki uygun sabit bir O referans noktasından ölçülen s mesafesiyle belirlenebilir. $t + \Delta t$ anında paracık P' noktasında hareket etmekte ve koordinatları $s + \Delta s$ olmaktadır. Δt zamanı boyunca konum koordinatındaki değişim, paracığın Δs yer değiştirmesi olarak adlandırılır. Paracık negatif s yönünde hareket ediyorsa yer değiştirme negatif olacaktır.

→ Paracığın aldığı toplam yol (s_T), hareketi süresince izlediği yörüngenin toplam uzunluğudur.

→ Paracık hareketi süresince hiç yön değiştirmemisse paracığın konumu, paracığın aldığı toplam yolu verir.

→ Hız, birim zamanda yer değiştirme miktarıdır. Birimi m/s'dir.

yer değiştirmeye bağlı ortalama hız: $v_{ort} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

alınan toplam yola bağlı ortalama hız: $v_{ort} = \frac{s_T}{\Delta t}$

anlık hız: $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$

→ Parçacık hareketi süresince hiç yön değiştirmemişse, her iki ortalama hız da birbirine eşit olur. Ancak parçacık hareketi süresince yön değiştirmişse her iki ortalama hız farklı değerler alır.

→ Parçacığın hareketi süresince $v=0$ olduğu anlarda parçacığın yön değiştirdiği anlarılır.

→ Parçacık negatif s yönünde hareket ediyorsa hız negatif, pozitif s yönünde hareket ediyorsa hız pozitif olacaktır. Dolayısıyla hızın işareti hareketin yönü ile ilgili fikir verir.

→ İvme, birim zamanda hızdaki değişme miktarıdır. Dolayısıyla ivme hızlanma ya da yavaşlama anlamına gelir. Birimi m/s^2 'dir.

Ortalama ivme: $a_{ort} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Anlık ivme: $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} \rightarrow a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$

→ İvme, hızın artmasına veya azalmasına bağlı olarak pozitif veya negatiftir. Burada paracığın azalmakta olan negatif hıza sahip olması halinde ivmenin pozitif olacağına dikkat edilmelidir. Paracık yavaşlıyorsa negatif ivmeleniyor demektir.

→ Anlık hız ve anlık ivme tanımlarında dt zamanı elimine edilerek, yer değiştirme, hız ve ivme ile ilgili diferansiyel bir denklem elde edilir.

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{ds}{dt} \rightarrow dt = \frac{ds}{v} \\ a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dt = \frac{dv}{a} \end{array} \right\} \begin{array}{l} v dv = a ds \rightarrow a = a(s) \\ a = v \frac{dv}{ds} \rightarrow v = v(s) \end{array}$$

→ İvme; zamanın ($a=a(t)$), konumun ($a=a(s)$) veya hızın ($a=a(v)$) bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Bu durumda böyle bir hareket değişken ivmeli hareket olarak tanımlanır. Hareketin en genel halidir. Düzgün değişken doğrusal hareket olarak da tanımlanır. Bu tip bir hareket için aşağıdaki kinematik bağıntılar kullanılır.

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{s} \quad \text{veya} \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$$

$$a=a(s) \text{ ise } v dv = a ds \quad \text{veya} \quad v=v(s) \text{ ise } a = v \frac{dv}{ds}$$

→ İvme, sabit bir sayıya eritildiğinde ($a=a_c = sbt$) böyle bir hareket sabit ivmeli hareket olarak tanımlanır. Hareketin özel bir halidir. Düzgün doğrusal hareket olarak da tanımlanır. Bu tip bir hareketin çözümü için kullanılacak olan kinematik bağıntılar değişken ivmeli hareket bağıntılarının integrasyonu ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$v = v_0 \mp a_c \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t \mp \frac{1}{2} a_c \cdot t^2$$

$$v^2 = v_0^2 \mp 2a_c \cdot (s - s_0)$$

→ Burada parçacık hızlanıyorsa ivme (+) işaretli ve yavaşlıyorsa (-) işaretli olur.

→ Doğrusal harekette hız sabit olduğunda ivme sıfır olur. Dolayısıyla ivmenin sıfır olması, hızın değişmediğini ve sabit kaldığını gösterir. Sabit ivmeli hareketin özel bir hali gibi de düşünülebilir.

2.1.1-Dogrusal Yörünge de Sirehli Hareket ve Dözensiz Hareket

→ Doğrusal yörünge de hareket "sirehli hareket" ve "dözensiz hareket" şeklinde verilir.

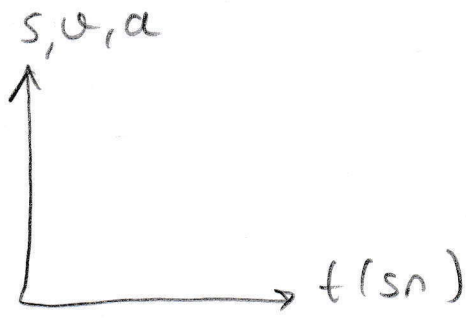
→ Sirehli hareket: Bir paracacığın belirli bir zaman veya belirli bir konum aralığındaki hareketi sirehli ise, konum, hız ya da ivme tek bir matematiksel fonksiyon ile tanımlanabilir.

$$\text{Örn: } s = t^3 - 9t^2 + 15t$$

$$v = 3t^2 - 18t + 15$$

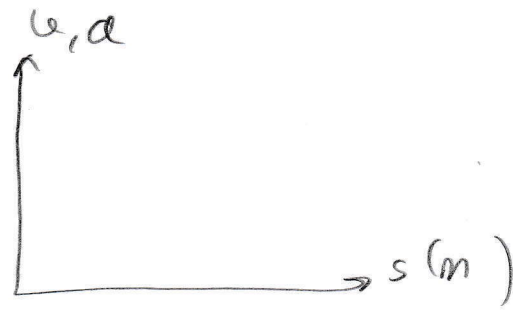
$$a = 6t - 18$$

→ Dözensiz hareket: Bir paracacığın belirli bir zaman veya belirli bir konum aralığındaki hareketi dözensiz ise, hareket en iyi şekilde bilgisayar çıktılarından deneysel olarak oluşturulabilecek bir dizi egri ile grafiksel olarak tanımlanabilir.



$s-t \rightarrow v-t \rightarrow a-t$ (türev)

$a-t \rightarrow v-t \rightarrow s-t$ (int)



$a-s \rightarrow v-s$ (int)

$v-s \rightarrow a-s$ (türev)

→ $s-t$ grafiğinin eğimi $v-t$ grafiğini, $v-t$ grafiğinin eğimi $a-t$ grafiğini verir. $a-t$ grafiği altında kalan alan $v-t$ grafiğini, $v-t$ grafiği altında kalan alan $s-t$ grafiğini verir.

→ $v-s$ grafiğinin eğimi $a-s$ grafiğini verir. $a-s$ grafiği altında kalan alan $v-s$ grafiğini verir.

→ Düzgün harekette her bir zaman veya konum aralığı için tek tek hesaplama yapılır.

→ $s-t$, $v-t$ ve $v-s$ grafiklerinde süreklilik vardır. $a-t$ ve $a-s$ grafiklerinde süreklilik yoktur.

2.1.2-Doğrusal Yörüngede Serbest Uçuş Hareketi

→ Düzey doğrultuda gerçekleşen bir harekettir ve $\vec{F}$ kuvvetinin doğurduğu $\vec{a}$ ivmesi ile değil, yalnızca cismin $\vec{W}$ ağırlığından dolayı, yerçekiminin doğurduğu $\vec{g}$ ivmesi ile gerçekleşir.

→ $\vec{g}$ ivmesi düzey doğrultuda, aşağı yönlü ve 9.81 m/s^2 sabit değere sahip bir ivmedir.

→ Böylece bu tip bir hareket de yine sabit ivmeli hareket olarak tanımlanır ve bu tip bir hareketin çözümünde kullanılacak olan kinematik bağıntılar aşağıdaki gibidir.

$$v = v_0 \mp g \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t \mp \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 = v_0^2 \mp 2g (h - h_0)$$

$$\downarrow \vec{g}$$

→ Burada hareketin yönü ($\uparrow +$) verilmiŷse $g(-)$ izaretli ve hareketin yönü ($\downarrow +$) verilmiŷse $g(+)$ izaretli alınır. g 'nin izareti hareketin yönüne göre değil pozitif yön tanımına göre belirlenir.

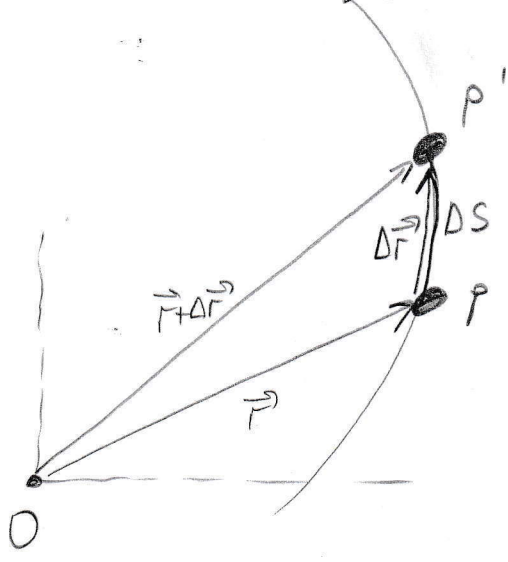
2.2. Düzlemde Eğrisel Hareket

→ Burada, parçacığın tek bir düzlemde yer alan eğrisel bir yörünge boyunca olan hareketi incelenmektedir.

→ Düzlemde eğrisel hareket vektör analizi ile tanımlanır. Bu konunun devamı, dinamikteki en temel kavramlardan birini, yani bir vektörün zaman türevini içermektedir. Dinamikteki pek çok analiz, vektörel büyüklüklerin zamana bağlı değişiminden faydalanmaktadır.

→ Düzlemsel bir eğri boyunca bir parçacığın sıradaki hareketini göz önünde bulundurduğumuzda kinematik büyüklükler aşağıdaki gibi tanımlanır.

→ Konum ve yer değiştirme:



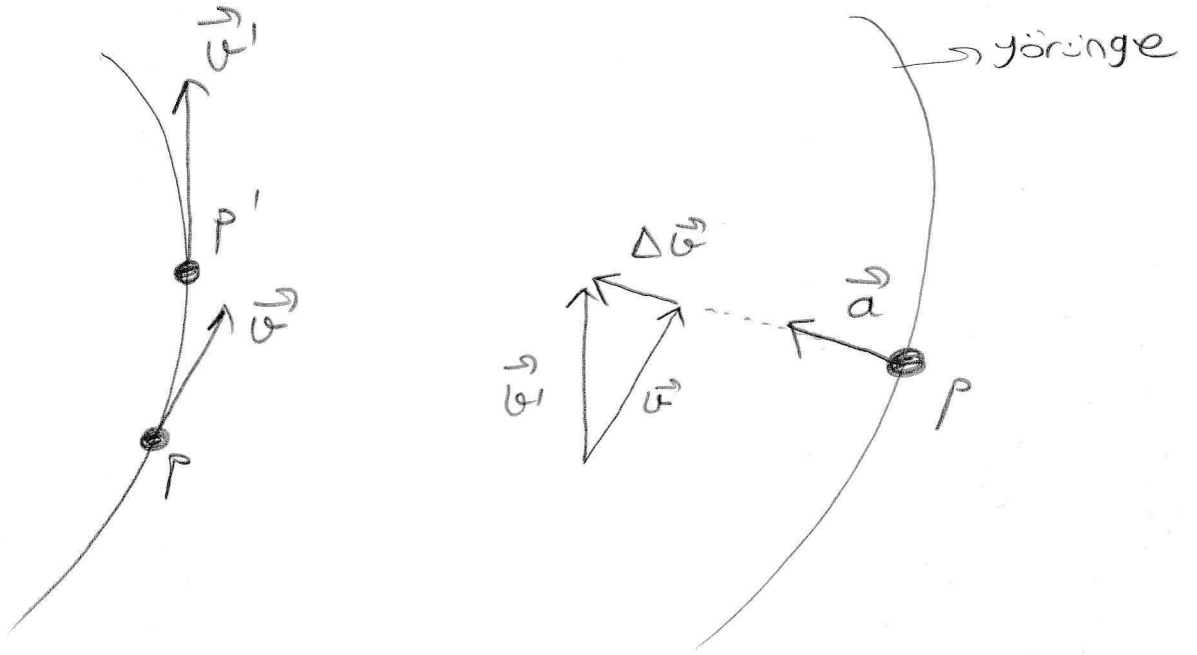
$\vec{OP} = \vec{r}$ ve $\vec{OP'} = \vec{r} + \Delta\vec{r}$: konum vektörü (m)

$\Delta\vec{r}$: yer değiştirme vektörü (m)

Δs : skaler yer değiştirme mesafesi (m)

→ Genel olarak parçacık eğrisel bir yörüngede hareket ettiğinde konum vektörünün doğrultusu, büyüklüğü ve yönü değişir.

→ Hız:



Ortalama hız: $\vec{v}_{ort} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ (m/sn)

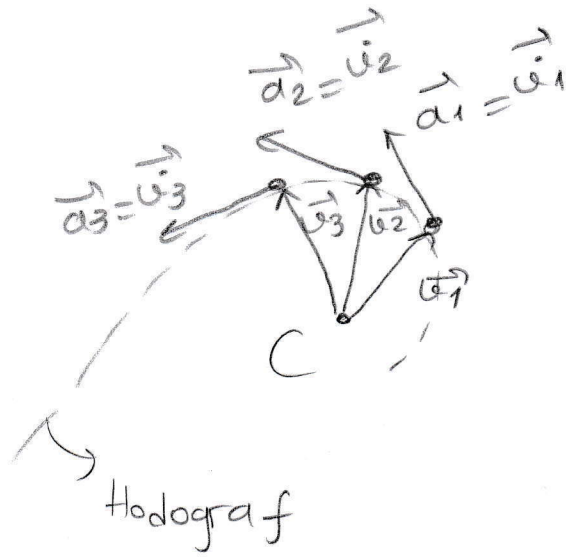
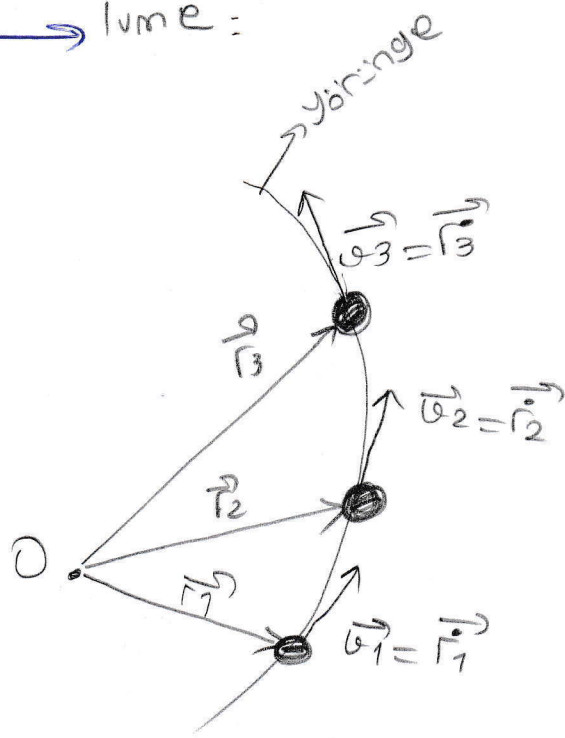
Ortalama hız: $v_{ort} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (m/sn)

Anlık hız: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

Hız: $v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$

→ Hız vektörü yörüngeye teğet bir vektördür.

→ ivme:



Hodograf

ortalama ivme: $\vec{a}_{ort} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{m/s}^2)$

anlık ivme: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$

→ ivme vektörü hodografa teğet bir vektördür.

→ Gözleldiği gibi hız, konum vektörü ile ve ivme, hız vektörü ile ilgilidir.

→ Düzlemde eğrisel hareket için farklı koordinat sistemlerinde incelenecektir. Bunlar; Kartezyen koordinatlar (x, y) , doğal koordinatlar (s, t) ve kutupsal koordinatlardır (r, θ) .

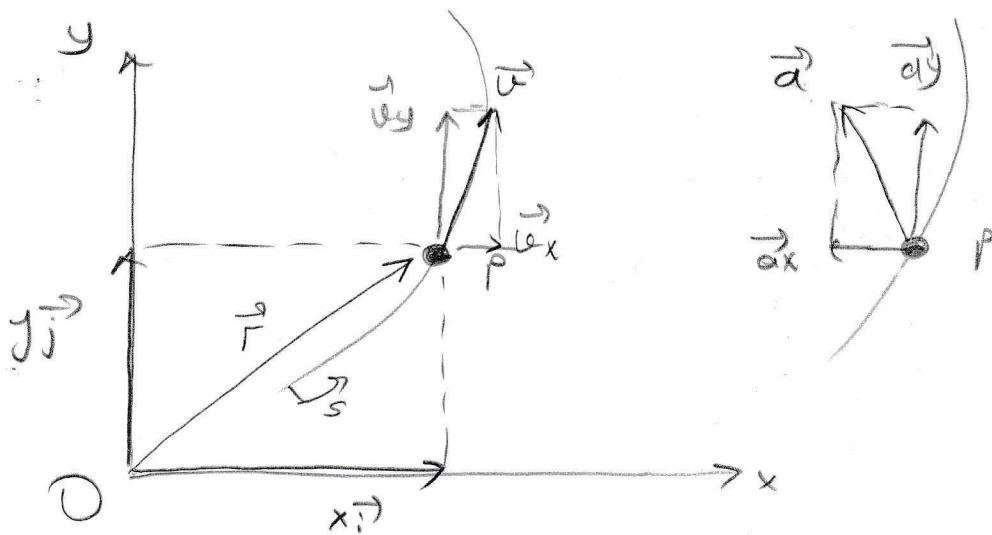
→ Herhangi bir düzlemde eğrisel hareketi tanımlamak için bu üç koord. sisteminden herhangi biri kullanılabilir. Ancak verilen bir problem için yörüngesinin geometrisine uygun olan koord. sisteminin seçimi bu dersin konusuna oluşturmaktadır.

2.2.1. Kartezyen Koordinatlar (x-y)

→ Bu koordinat sistemi, özellikle ivmenin x-ve y-bileşenlerinin bağımsız olarak olustugu veya belirtildiği hareketin tanımlanması durumunda veya başka bir ifadeyle paracığın izlediği yolu veya yolun uzunluğunu tam olarak bilmek gerektirmediği durumlarda kullanışlıdır.

→ Kartezyen koordinatlar ile paracığın hareketi sabit bir O noktasından izlenir.

→ Kartezyen koordinat sistemi sabit bir O noktasında yerleştirilir.



→ Kartezyen koordinatlarda kinematik büyüklükler
 yörünge denklemleri $y=f(x)$ ve $x=f(t)$ ve $y=f(t)$ olmak
 üzere aşağıdaki gibidir.

→ Konum:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta_r = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

→ Hız:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \rightarrow \begin{aligned} v_x &= \dot{x} \\ v_y &= \dot{y} \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\theta_v = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x}$$

→ Nme:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \rightarrow \begin{aligned} a_x &= \ddot{x} \\ a_y &= \ddot{y} \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\theta_a = \tan^{-1} \frac{a_y}{a_x}$$

→ Burada zamana göre türev alırken, şiddetleri ve yönleri sabit kaldığı için birim vektörlerin zamana göre türevleri sıfır olmuştur.

2.2.1.1. Serbest Vauç Hareketi / Atış Hareketi

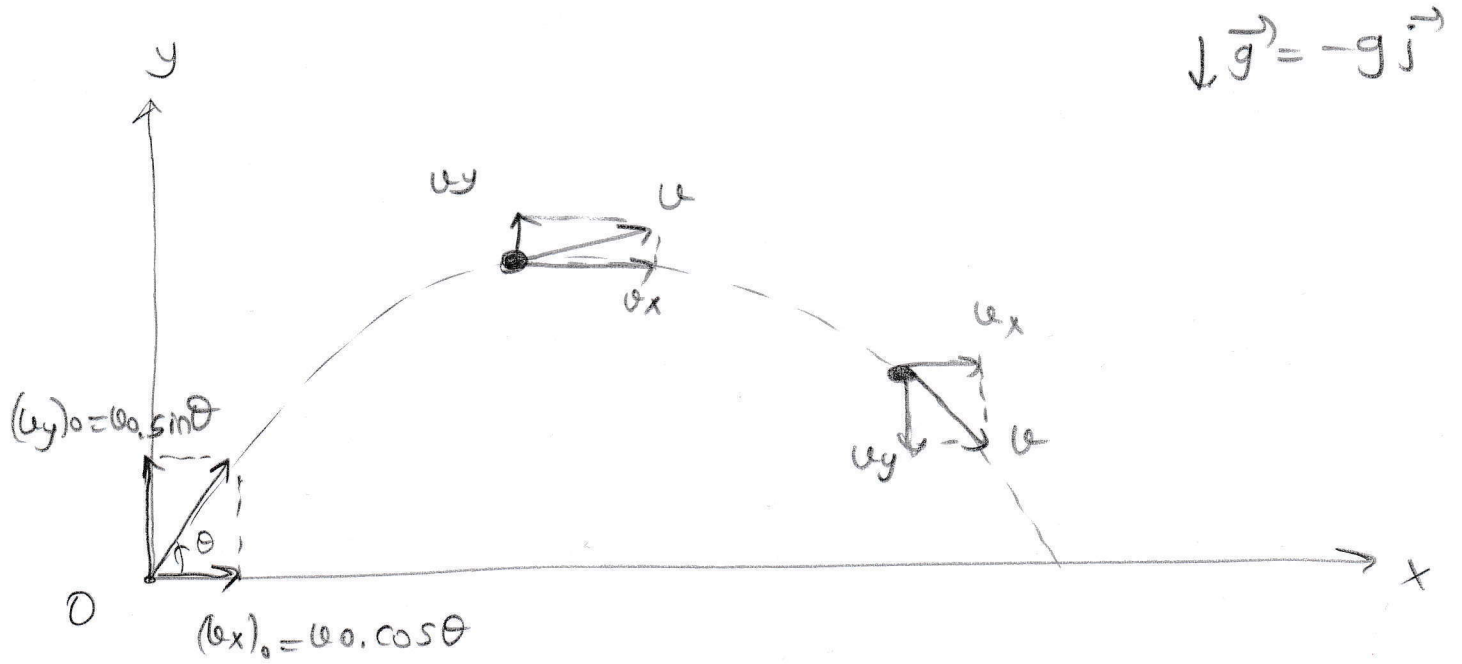
→ Serbest vauç hareketi / atış hareketi iki boyutlu kinematik teoninin önemli bir uygulamasıdır.

→ Serbest vauç hareketi cismin sadece kendi ağırlığından dolayı etki eden yerçekimi ivmesiyle gerçekleşen bir harekettir.

→ Bir merminin hareketi ve bir futbol topunun hareketi eğrisel yörüngede gerçekleşen serbest vauç hareketine örnek olarak gösterilebilir.

→ Burada aerodinamik direnç ve dünyanın eğriselliği ile dönüşü ihmal edilmekte ve yerçekiminden kaynaklanan ivmeyi sabit olarak dikkate alacak şekilde yükseklik değişimlerinin yeterince küçük olduğu kabul edilmektedir. Bu kabullerle, Kartezyen koordinatlar yörünge analizi için kullanışlıdır.

→ Hareketin yönüğürs tensili olarak arağıdahi gibi verilebilir.



→ Serbest ucu? hareketinde aerodinamik direnci (hava direnci) ihmal edildiğinden mermiye etki eden tek kuvvet, merminin ağırlığıdır. Bu da merminin düzey doğrultuda ve arağı yönü? sabit bir yavaşlması ivmesi kazanmasına neden olur. Buna göre, merminin ivmesi arağıdahi gibi tanımlıdır.

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \rightarrow a_x = 0$$

$$a_y = -g \quad (g = 9.81 \text{ m/s}^2)$$

→ Kinematik analiz için, eğrisel yörünge de serbest vücut hareketi, yatayda ivmesiz ve dikeyde sabit yerçekimi ivmesinin etkisinde gerçekleşen, birbirine dik iki doğrusal hareketin bileşkesi olarak düşünülür.

→ Buna göre sabit ivmeli doğrusal hareket bağıntıları serbest vücut hareketine uyarlanarak, serbest vücut hareketinin kinematik bağıntıları elde edilir.

Sbt. ivmeli doğrusal hareket	Yatay hareket ($a_x=0$)	Dikey hareket ($a_y=-g$)
$v = v_0 + a \cdot t$	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - g \cdot t$
$s = s_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$	$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$	$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(s-s_0)$	$v_x = v_{0x}$	$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y-y_0)$

→ Yatay hareket için elde edilen sonuçlar, hareket süresince hızın yatay bileşeninin daima sabit kaldığını gösterir.

→ Yatay hareket bağıntıları ($a_x = 0$)

$$v_x = v_{0x}$$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$$

→ Düzey hareket bağıntıları ($a_y = -g$) ↑↑

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

→ Serbest düşüş hareketi büyük hızlar ve yüksek irtifalar içerdiğinde, doğru sonuçları elde etmek için, hareketin şeklini, irtifa ile g 'nin ve hava yoğunluğunun değişimini ve dünyanın dönüşünü hesaba katmak gerekir. Bu faktörler hareket denklemlerini önemli ölçüde zorlaştırmaktadır ve genellikle ivme denklemlerinin sayısal integrasyonunu gerektirmektedir.

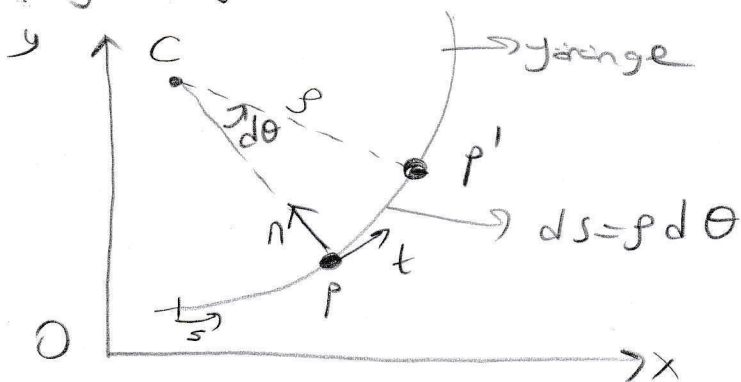
2.2.2. Normal ve Tegetsel Koordinatlar (n-t)

→ Paracığın izlediği yolun eğrilik merkezi biliniyorsa veya hesaplanabiliyorsa hareketi normal ve tegetsel koordinatlarda incelemek uygundur.

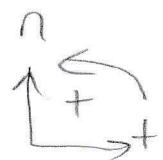
→ Normal ve tegetsel koordinatlar paracığın üzerine yerleştirilir. Yörünge boyunca normal ve tegetsel koordinatların paracık ile beraber hareket ettiği göz önünde bulundurulur. Herhangi bir konumda n 'nin pozitif yönü daima yörüngenin eğrilik merkezine doğru alınır ve t 'nin pozitif yönü n 'ye dik ve hareket yönündedir.

→ Eğrilik yön değiştiriyorsa, pozitif n -yönü eğrinin bir tarafından diğer tarafına yer değiştirecektir.

→ Düzlemde sabit bir eğri boyunca hareket eden P paracığını göz önüne alalım.



n - t düzlemi (osilatör düzlem)



→ $f = s\ddot{\theta}$ olan ve tek bir eğrilik merkezine sahip yörüngeler bu bölümün konusunu oluşturmaktadır.

→ Özel olarak yol $y = f(x)$ yörünge denklemini ile ifade ediliyorsa, yol üzerindeki herhangi bir noktada eğrilik yarıçapı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$y = f(x) \rightarrow f = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

→ Hız: Hız vektörü yörüngeye teğet bir vektördür. Bu nedenle doğal koordinat sisteminde sadece teğetsel bileşeni vardır.

$$\vec{v} = v \vec{u}_t$$

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{u}_t$$

$$\vec{a} = v \ddot{\theta} \vec{u}_t$$

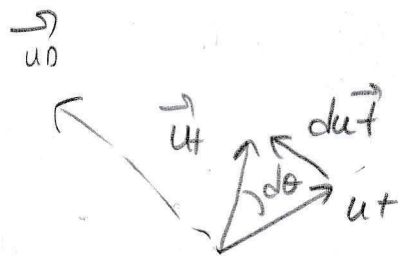
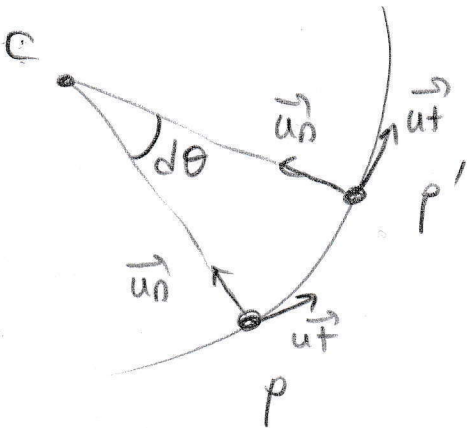
→ İvme:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{u}_t + v \dot{\vec{u}}_t$$

→ Burada $\vec{u}_t$ t-derivi sıfır olamaz. Çünkü koordinat sistemi paracik üzerine yerleştirilmiştir ve böylece paracik hareket ettikçe $\vec{u}_t$ birim vektör büyüklüğüne konur ancak doğrultusu değişir.

→ O halde $\dot{\vec{u}}_t$ arağı dahi gibi hesaplanır.



skaler

$$ds = r d\theta$$

$$du_t = u_t d\theta \quad (u_t = 1)$$

$$du_t = d\theta$$

$$\frac{du_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{u}_t = \dot{\theta}$$

vektörel

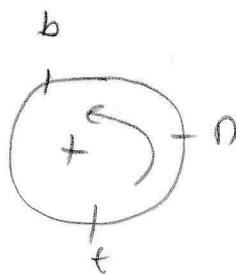
$$d\vec{u}_t = du_t \vec{u}_n$$

$$\vec{u}_t = \dot{\theta} \vec{u}_n$$

($\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ old. için
 $\vec{u}_n$ 'nin t'ye göre
 yok)

→ Sonuç: Bir birim vektörün zamanına göre t'ye göre
 $\dot{\theta}$ birim vektörün doğrultusunu veren birim vektör
 (ona dik olan) ile açısal hızın çarpımına eşittir.

$$\vec{u}_t = \dot{\theta} \times \vec{u}_n$$



$$\vec{u}_t = \dot{\theta} \vec{u}_n$$

→ Böylece ivme aragıdali gibi düzenlenir.

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{u}_t + v \dot{\vec{u}}_t$$

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{u}_t + v \dot{\theta} \vec{u}_n \quad \left(s = \int \theta \rightarrow \theta = \frac{s}{r} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{r} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{r} \right)$$

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$$

$$\vec{a} = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n \rightarrow a_t = \dot{v} = \dot{s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

→ İvmenin tegetsel bilezeni, hızın büyüklüğünün zamana göre değriim oranının bir sonucudur. Bna göre, doğrusal hareket denklemleri kullanılarak, eğriyel harekette İvmenin tegetsel bilezeni hesaplanabilir.

→ a_t değişken ise teğetsel bileşen için aşağıdaki bağıntılar yazılır.

$$a_t = \dot{v} \quad \left(v = \frac{ds}{dt} \right)$$

$$a_t ds = v dv \quad \text{veya} \quad a_t = v \frac{dv}{ds}$$

→ a_t sabit ise teğetsel bileşen için aşağıdaki bağıntılar yazılır.

$$v = v_0 \mp a_t \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t \mp \frac{1}{2} a_t \cdot t^2$$

$$v^2 = v_0^2 \mp 2a_t \cdot (s - s_0)$$

→ Normal ve teğetsel koordinatlarda incelediğimiz eğrisel hareket için tanımlanan iki özel hareket halini ele alalım.

→ 1. Paracik bir doğru boyunca hareket ediyorsa,

$$s \rightarrow \infty \rightarrow a_n = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow a_n = 0$$

ve

$$a = a_t = \dot{v}$$

olur. Buradan ivmenin teğetsel bilezeninin, hız büyüklüğünün zamana göre değişim oranını ifade ettiği sonucu çıkar.

→ 2. Paracik bir eğri boyunca sabit hızla hareket ediyorsa,

$$v = sbt \rightarrow a_t = \dot{v} = 0$$

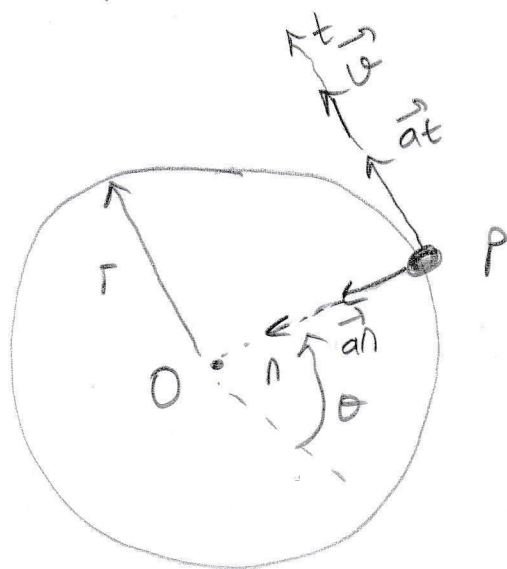
ve

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

olur. Buradan ivmenin normal bilezeninin, hızın doğrultusunun zamana göre değişim oranını ifade ettiği sonucu çıkar. Bu bilezen, daima eğrilik merkezine doğru etkilendiğinden, bazen "merkezil ivme" olarak adlandırılır. ($a_t \Rightarrow$ hızın büyüklüğündeki değişim, $a_n \Rightarrow$ hızın doğrultusundaki değişim)

2.2.2.1. Dairesel Hareket

→ Dairesel hareket, ρ eğrilik yarıçapının aemberin sabit r yarıçapı olduğu düzlemde eğrisel hareketin önemli özel bir durumudur.



→ P paracığının daireseel hareketi için hız ve ivme bileşenleri aşağıdaki hale gelmektedir.

$$v = \dot{s} = \rho \dot{\theta} = r \dot{\theta} \rightarrow v = r \dot{\theta}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{r} = r \dot{\theta}^2 = v \dot{\theta} \rightarrow a_n = r \dot{\theta}^2 \text{ veya } a_n = v \dot{\theta}$$

$$a_t = \dot{v} = \cancel{r \dot{\theta}} + r \ddot{\theta} = r \ddot{\theta} \rightarrow a_t = r \ddot{\theta}$$

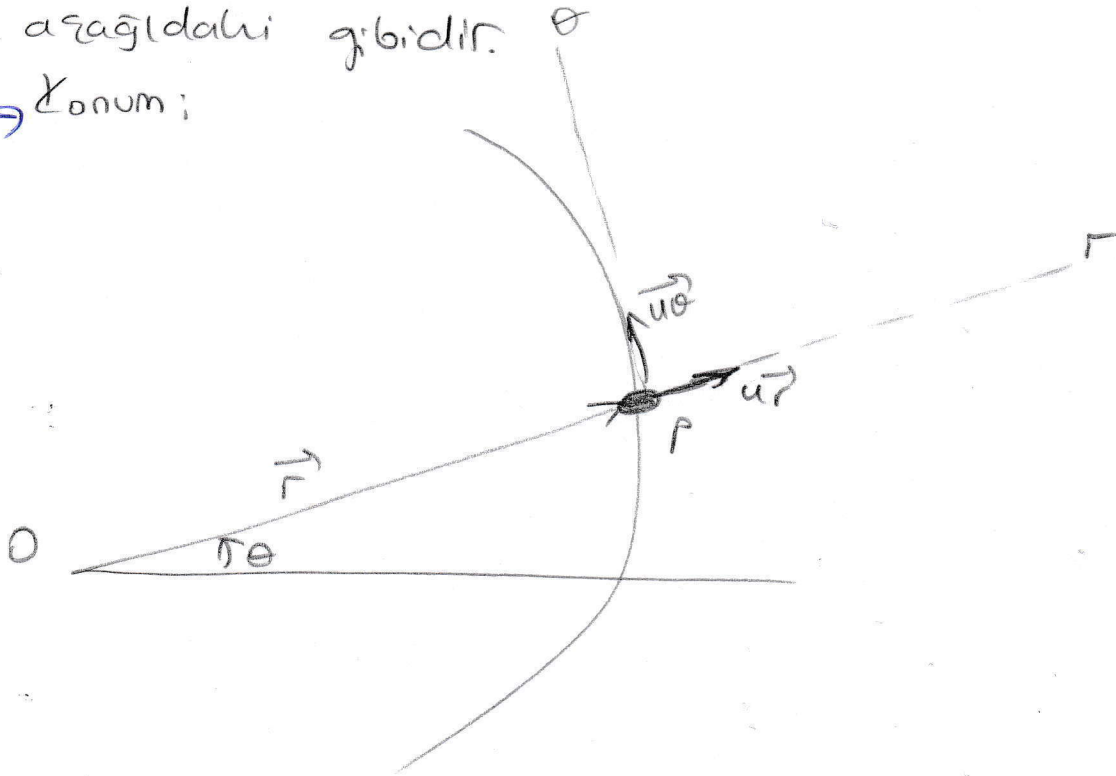
2.2.3. Kutupsal Koordinatlar ($r-\theta$)

→ Bir parçacık sabit bir O noktasına göre ötelenen ve dönen bir yörüngede hareket ediyorsa, böyle bir hareketi kutupsal koordinatlarda incelemek uygundur.

→ Kutupsal koordinat sistemi parçacığın üzerine yerleştirilir, ancak hareket sabit bir O noktasından gözlenir. Bu O noktasının yörüngenin eğrilik merkezi olması gerekmez.

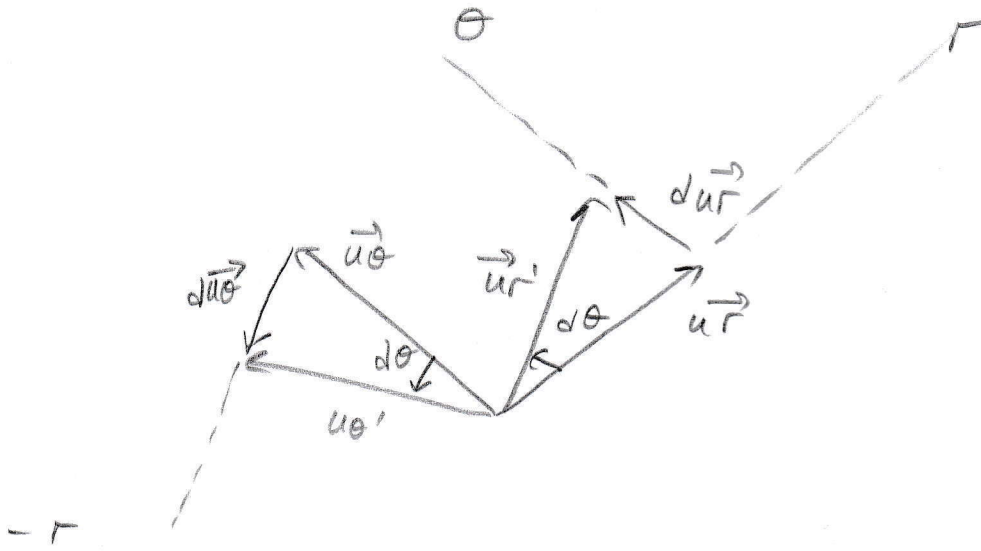
→ Kutupsal koordinatlarda kinematik büyüklükler yörünge denklemleri $r=f(\theta)$ ve $r=f(t)$ ve $\theta=f(t)$ olmak üzere aşağıdaki gibidir. θ

→ Konum;



$$\vec{r} = r \vec{u}_r \quad (m)$$

→ Birim vektörlerin zaman türevleri aşağıdaki gibidir.



$$\vec{u}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_\theta = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

→ Hız:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad (\text{m/sn})$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta \rightarrow \begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{(v_r)^2 + (v_\theta)^2}$$

Burada $r(m)$ radyal doğrultu, $\dot{r}(m/sn)$ radyal mesafenin artma veya azalma oranı, $\theta(rad)$ açısal doğrultu, $\dot{\theta}(rad/sn)$ açısal hız olarak tanımlıdır.

→ ivme:

$$\vec{a} = \vec{\ddot{r}} \quad (m/sn^2)$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \ddot{\theta}r\vec{u}_\theta + \dot{\theta}\dot{r}\vec{u}_\theta + \dot{\theta}r\dot{\theta}\vec{u}_\theta - \dot{\theta}\dot{r}\vec{u}_r$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta \rightarrow a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$a = \sqrt{(\ddot{r})^2 + (a_\theta)^2}$$

Burada $\ddot{r}(m/sn^2)$ radyal ivme ve $\ddot{\theta}(rad/sn^2)$ açısal ivme olarak tanımlıdır. İvmenin θ -bileşeni alternatif olarak,

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$$

şeklinde de yazılabilir.

2.2.3.1. Dairesel Hareket

→ r 'nin sabit olduğu dairesel bir yörüngedeki hareket için kinematik bileşenler aşağıdaki hale gelir.

$$v_r = \dot{r} = 0 \longrightarrow v_r = 0$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \longrightarrow v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2 \longrightarrow a_r = -r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\ddot{\theta} \longrightarrow a_\theta = r\ddot{\theta}$$

→ Bu özel dairesel hareket durumunda (n, t) ve (r, θ) koordinatları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$a_r = -a_n$$

$$a_\theta = a_t$$

→ Bu özel dairesel hareket durumunda O noktası aynı zamanda eğrilik merkezidir.

→ Kutupsal koordinatlardan Kartezyen koordinatlara
dönüştürme,

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

koordinat bağıntıları ile verilir. Kartezyen koordinatlar
ine aşağıdaki gibi elde edilir.

$$a_x = \ddot{x}$$

$$a_y = \ddot{y}$$

→ Kutupsal koordinatlarda verilen problemler kuvvaidisinden değeriendirildiğinde genel olarak iki tip problem ortaya çıkar.

→ 1. Koordinatlar zaman parametresi $r = r(t)$ ve $\theta = \theta(t)$ verilebilir.

$$r = 4t^2 \rightarrow \dot{r} = 8t \rightarrow \ddot{r} = 8$$

$$\theta = 8t^3 + 6 \rightarrow \dot{\theta} = 24t^2 \rightarrow \ddot{\theta} = 48t$$

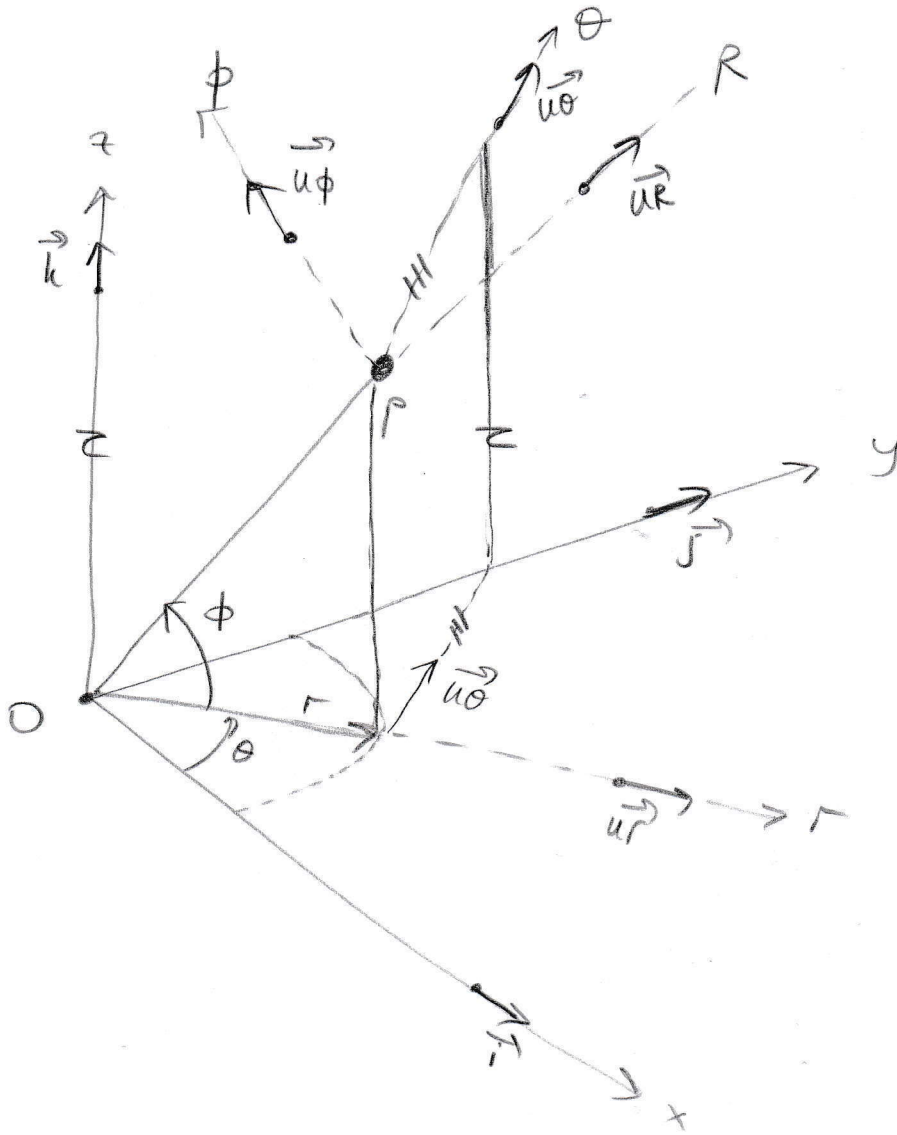
→ 2. Koordinatlar yörünge denklemi $r = f(\theta)$ ile verilebilir.

$$r = 5\theta^2 \rightarrow \dot{r} = 10\theta\dot{\theta} \rightarrow \ddot{r} = 10(\dot{\theta}\dot{\theta} + \theta\ddot{\theta})$$

$$r^2 = 6\theta^3 \rightarrow 2r\dot{r} = 18\theta^2\dot{\theta} \rightarrow 2(\dot{r}\dot{r} + r\ddot{r}) = 18(2\theta\dot{\theta}\dot{\theta} + \theta^2\ddot{\theta})$$

2.3. Uzayda Eğrisel Hareket

→ Bir parçacığın bir uzay eğrisi boyunca üç boyutlu hareketini tanımlamak için uygunlukla Kartezyen (x, y, z) silindirik (r, θ, z) ve küresel (R, θ, ϕ) koordinatlar olmak üzere üç koordinat sistemi kullanılmaktadır.



2.3.1. Kartezyen Koordinatlar (x, y, z)

→ Bir uzay eğrisi boyunca hareket eden P paracağının hareketi kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibi verilir.

→ Konum:

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{u}_R = \frac{\vec{R}}{R}$$

→ Hız:

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \rightarrow v_x = \dot{x}$$

$$v_y = \dot{y}$$

$$v_z = \dot{z}$$

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{v}$$

→ i v m e :

$$\vec{a} = \vec{\ddot{x}}$$

$$\vec{a} = \vec{\ddot{R}}$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \rightarrow \begin{aligned} a_x &= \ddot{x} \\ a_y &= \ddot{y} \\ a_z &= \ddot{z} \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$$

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{a}$$

2.3.2. Silindirik Koordinatlar (r, θ, z)

→ Bir uzay eğrisi boyunca hareket eden P parçacığının hareketi silindirik koordinatlarda aşağıdaki gibi verilir.

→ Konum:

$$\vec{R} = r \vec{u}_r + z \vec{k}$$

→ Hız:

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta + v_z \vec{k} \rightarrow \begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r \dot{\theta} \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{(v_r)^2 + (v_\theta)^2 + (v_z)^2}$$

→ İvme:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta + a_z \vec{k} \rightarrow \begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \\ a_z &= \ddot{z} \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{(a_r)^2 + (a_\theta)^2 + (a_z)^2}$$

→ Silindirik koordinatlarda, doğrultularındaki değişim nedeni ile $\vec{u}_r$ ve $\vec{u}_\theta$ birim vektörlerinin zaman türevlerinin sıfır olmamasına karşın, z - doğrultusundaki $\vec{u}_z$ birim vektörünün doğrultusu sabit kalmakta ve bu nedenle zaman türevi sıfır olmaktadır.

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

$$\dot{\vec{u}}_z = 0$$

2.3.3. Küresel Koordinatlar (R, θ, ϕ)

→ Örneğin radar ölçümlerinde olduğu gibi, bir paracağın konumunu belirlemek için radyal bir mesafe ve iki açıdan yararlanıldığında küresel koordinatlar (R, θ, ϕ) kullanışlı olmaktadır.

→ Hız:

$$\vec{v} = v_R \vec{u}_R + v_\theta \vec{u}_\theta + v_\phi \vec{u}_\phi$$

$$v_R = \dot{R}$$

$$v_\theta = R \dot{\theta} \cos \phi$$

$$v_\phi = R \dot{\phi}$$

→ İvme:

$$\vec{a} = a_R \vec{u}_R + a_\theta \vec{u}_\theta + a_\phi \vec{u}_\phi$$

$$a_R = \ddot{R} - R \dot{\phi}^2 - R \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi$$

$$a_\theta = \frac{\cos \phi}{R} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\theta}) - 2R \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi$$

$$a_\phi = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\phi}) + R \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi$$

→ Hız ve ivme için, 2D koordinat sistemindeki bağıntıların herhangi ikisi arasında doğrusal cebirsel dönüşümler geliştirilebilir. Bu dönüşümler, örneğin küresel koordinatlardaki bileşenler biliniyorsa, Kartezyen koordinatlardaki hareket bileşenlerini veya tam tersini ifade etmeyi mümkün kılmahtadır. Bu dönüşümler matris işlemleri veya basit bir bilgisayar programı ile kolaylıkla elde edilir.

2.6. Ötelenen Eksenler ile Bağlı Hareket (İzafi Hareket)

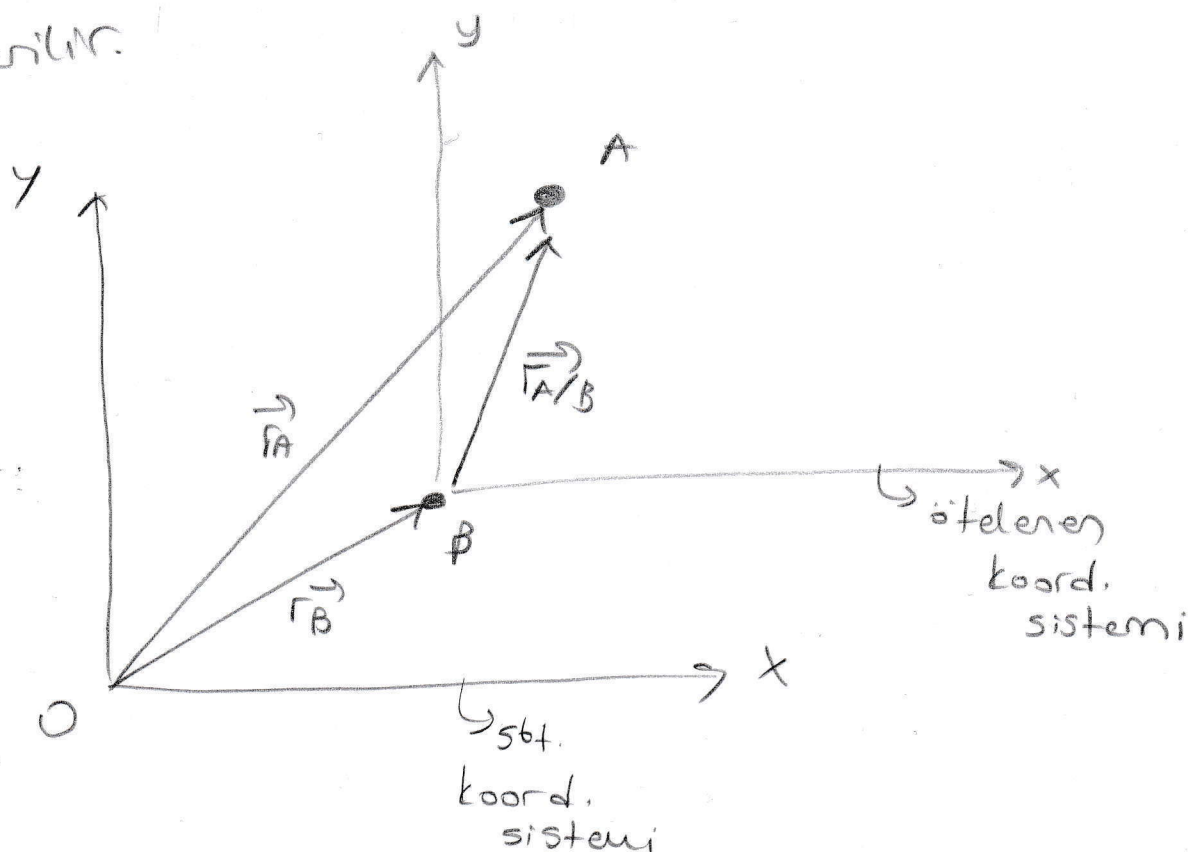
→ Bir paracığın mutlak hareketi, ölçüm için tek bir sabit referans sistemi kullanılarak (önceki konularda olduğu gibi) belirtilmektedir. Ancak birçok durumda, paracığın hareketinin yörüngesi çok karmaşıktır ve iki veya daha fazla referans sistemi kullanarak, hareketi kısımlara ayırıp analiz etmek daha uygun olabilir.

→ Örneğin bir uçağın pervanesinin ucuna yerleşmiş bir paracığın hareketi; uçak uamakta iken, önce sabit bir referans sisteminden uçağın hareketi gözlenir ve sonra paracığın uçağa bağlı bir referans noktasından ölçülen dairesel hareketi vektörel olarak superpoze edilirse, daha kolay tanımlanır. Bu iki farklı hareketi tanımlamak için Kartezyen, normal ve teğetsel veya kutupsal koordinatlardan uygun olanlar seçilir.

→ Farklı koordinat sistemlerinde tanımlı iki hareket karşılaştırılacaksa, koordinatlar birbiri açısından yazılmalıdır.

→ Analiz için dünyanın hareketi ihmal edilecek ve ötelenen referans sistemleri ele alınacaktır ve bağıl analiz vektörel işlemlerden oluşmaktadır.

→ Bağıl hareket grafiksel olarak aşağıdaki gibi gösterilir.



→ Bağıl hareketin kinematik bağıntıları aşağıdaki gibidir.

→ A'nın B'ye göre bağıl konumu,

$$\vec{r}_{A/B} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

olmak üzere A'nın mutlak konumu aşağıdaki gibidir.

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}$$

Böylece bağıl konum mutlak konum cinsinden aşağıdaki gibi olur.

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

→ Hız ve ivme aşağıdaki gibidir.

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

2.5. Birbirine Bağlı Paraacıların Sınırlanmış Hareketi

→ Bazı durumlarda, paraacıların hareketleri birbirine bağlı elemanların fiziksel kısıtlarından ötürü ilişkilidir. Böyle durumlarda paraacıların kendi hareketlerini belirlemek için bu kısıtları hesaba katmak gereklidir. Bu tip problemler genellikle paraacıların makaralardan dolandırılmış uzamayan iplerle bağlı olduğu sistemlerde ortaya çıkar.

→ Bu tip problemlerin çözümünde aşağıdaki yol izlenir.

1. Sistemde ip sayısı belirlenir. İp sayısı kadar hareket denklemleri kurulacaktır ve sistem hareket denklemleri sayısı kadar serbestlik derecesine sahiptir.

2. Hareketi incelenecek olan paraacılar ve hareket doğrultuları belirlenir. Bu doğrultular birbirine dik olmak zorunda değildir.

3. Her bir doğrultu için bir referans eksen belirlenir.

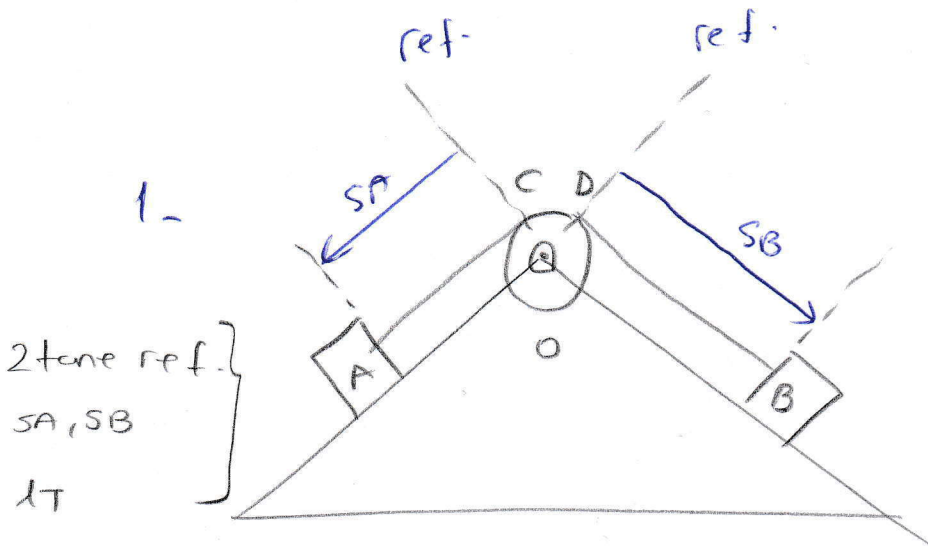
4 - Referans eksen başlangıç noktası olmak üzere her bir parçacığın konumu ve yöne pozitif yön tanımlanır.

5 - Her bir ipin toplam uzunluğu (l_T) konum koordinatları cinsinden yazılır.

6 - İpin toplam uzunluğunun değişmediği kabul edilirse 6 bilgidен yararlanarak kinematik büyüklükler olan yer değiştirme (Δs), hız (v) ve ivme (a) elde edilir.

→ Bağlı sistemlerde yön tanımları referans alınarak elde edilen ivmenin işareti hızlanma ya da yavaşlama bilgisi vermez. İşaret, hızlanma ya da yavaşlamadan bağımsız, hareketin yönüyle ilgilidir.

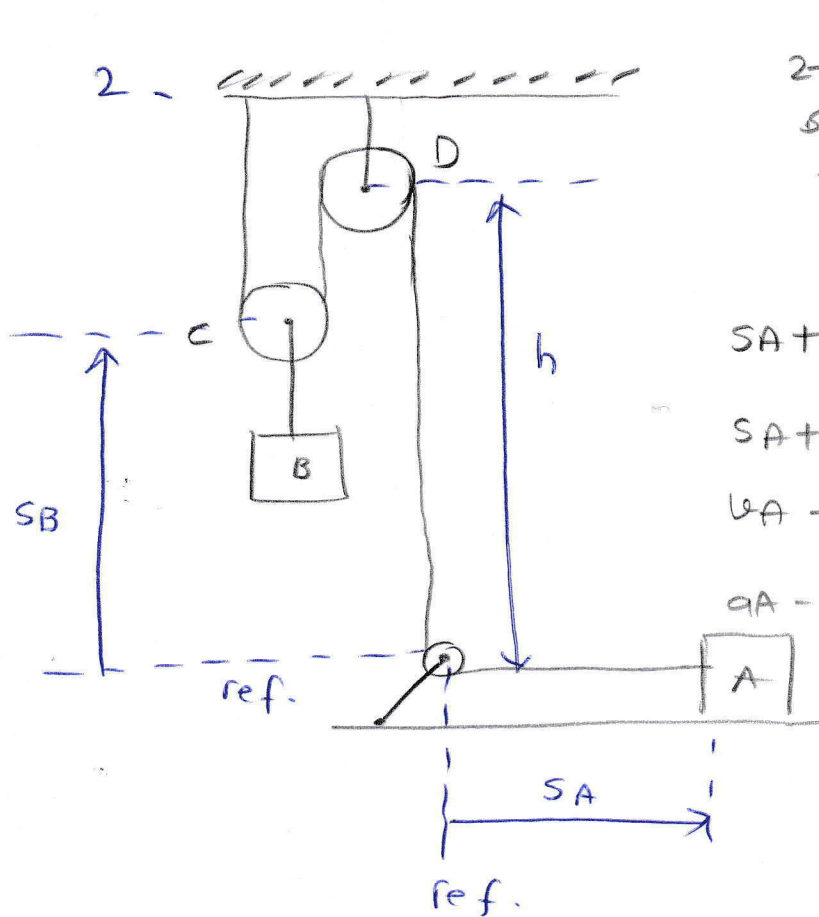
→ Bağlı hareket analizi için aşağıdaki örnekler incelenebilir.



$$s_A + s_B + l_{CD} = l_T$$

$$v_A + v_B = 0 \rightarrow v_A = -v_B$$

$$a_A + a_B = 0 \rightarrow a_A = -a_B$$

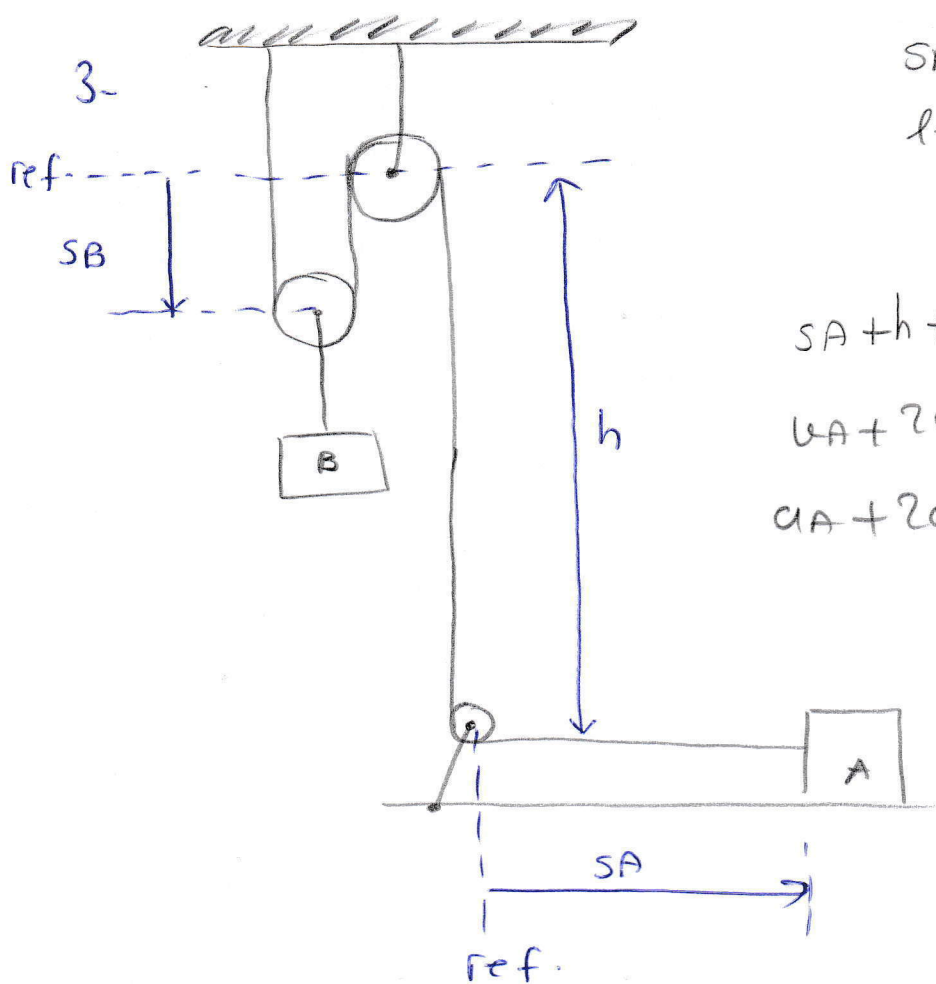


$$s_A + h + 2(h - s_B) = l_T$$

$$s_A + 3h - 2s_B = l_T$$

$$v_A - 2v_B = 0 \rightarrow v_A = 2v_B$$

$$a_A - 2a_B = 0 \rightarrow a_A = 2a_B$$



2 + one ref. }
 s_A, s_B
 l_T

$$s_A + h + 2s_B = l_T$$

$$v_A + 2v_B = 0 \rightarrow v_A = -2v_B$$

$$a_A + 2a_B = 0 \rightarrow a_A = -2a_B$$