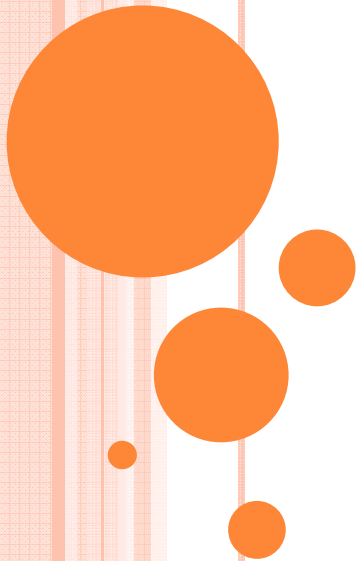


DÜZLEMDE EĞRİSEL HAREKET

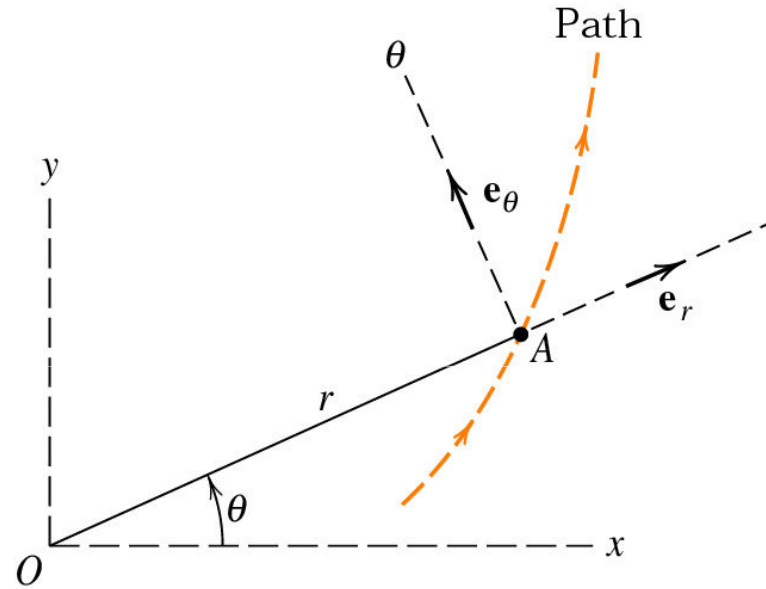
Polar (Kutupsal) Koordinatlar



Düzlemde eğrisel hareketin üçüncü tanımı polar koordinatlarda yapılır; burada parçacık sabit bir başlangıç noktasından r mesafe uzaktadır ve bu radyal doğru θ açısıyla ölçülmektedir. Hareket radyal bir mesafe ve açısal bir konum ile kısıtlı olduğunda veya kısıtlanmamış hareket radyal mesafe ve açısal konum cinsinden ölçüldüğünde polar koordinatları kullanmak uygun olur.



r ve θ koordinatları eğrisel yörünge izleyen bir parçacığın yerini tam olarak belirleyebilirler. x eksenini gibi keyfi bir doğru θ 'nın ölçümü için referans olarak kullanılabilir. $\vec{e}_r$ ve $\vec{e}_\theta$ birim vektörleri sırasıyla r ve θ 'nın pozitif yönlerini göstermektedir.



Düzlemde eğrisel hareket yapan parçacığın bu sistemde herhangi bir t anındaki konum, hız ve ivme vektörleri r ve θ koordinatlarıyla ve bunların zaman türevleriyle belirtilir. $\vec{e}_r$ ve $\vec{e}_\theta$ birim vektörleri de $\vec{e}_n$ ve $\vec{e}_t$ gibi daima birbirine dik ve değişken birim vektörlerdir. $+r$ (pozitif radyal yön) daima kutuptan parçacığın bulunduğu noktaya olan yöndür. $+\theta$ yönü ise θ 'nın artışı yönünde ve r 'ye diktir.



KONUM

$\vec{r}$ konum vektörü

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

olarak yazılır, konum vektörünün zamana göre türevi alınarak

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad \text{ve} \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

hız ve ivme ifadelerini elde edebilmek için $\vec{e}_r$ ve $\vec{e}_\theta$ 'nin zaman türevlerini belirlemek gerekmektedir. Bunlar $\dot{\vec{e}}_t$ 'ya benzer şekilde elde edilir. dt zaman aralığı boyunca koordinatlar dθ kadar yön değiştirir, birim vektörler de aynı şekilde döner ve $\vec{e}_r$ ile $\vec{e}_\theta$ olurlar. $d\vec{e}_r$ vektörel değişim +θ yönündedir, $d\vec{e}_\theta$ vektörel değişim ise -r yönündedir. Şekilden,



$$d\bar{e}_r = \underbrace{|\bar{e}_r|}_1 d\theta \bar{e}_\theta = d\theta \bar{e}_\theta$$

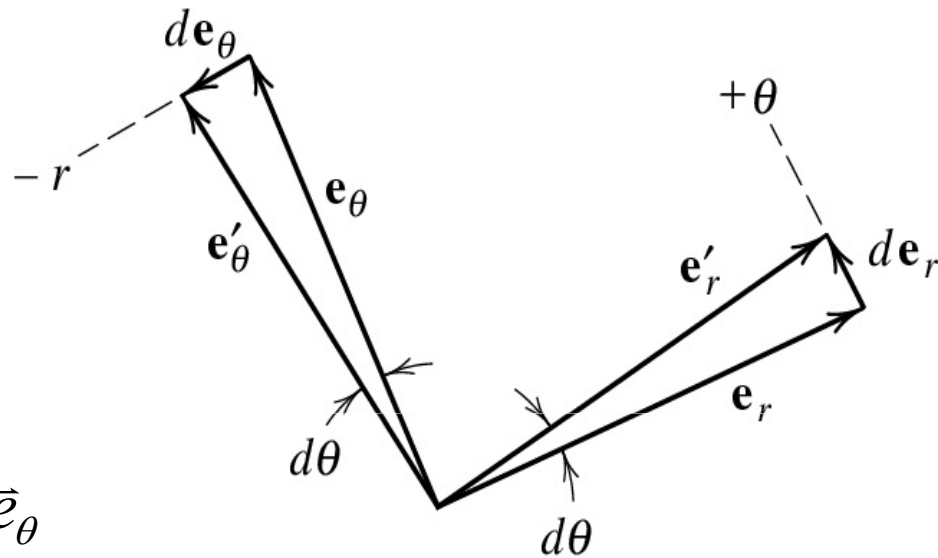
ve

$$d\bar{e}_\theta = \underbrace{|\bar{e}_\theta|}_1 d\theta (-\bar{e}_r) = -d\theta \bar{e}_r$$

dt'ye bölerek

$$\frac{d\bar{e}_r}{dt} = \dot{\bar{e}}_r = \frac{d\theta}{dt} \bar{e}_\theta \quad \dot{\bar{e}}_r = \dot{\theta} \bar{e}_\theta$$

$$\frac{d\bar{e}_\theta}{dt} = \dot{\bar{e}}_\theta = \frac{d\theta}{dt} (-\bar{e}_r) \quad \dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta} \bar{e}_r$$



HIZ

$\vec{r} = r\vec{e}_r$ 'yi zamana bağlı olarak türeterek,

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$$

$$v_r = \dot{r} \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

$\vec{v}$ 'nin r bileşeni, $\vec{r}$ 'nin boyundaki değişimi gösterir.

$\vec{v}$ 'nin θ bileşeni ise $\vec{r}$ 'nin dönmesinden dolayı meydana gelir.

$\vec{v}$ 'yi türeterek ivme elde edilir.



$$\begin{aligned}\bar{a} &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\bar{e}_\theta + r\ddot{\theta}\bar{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\bar{e}}_\theta \\ &= \dot{r}\bar{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\bar{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\bar{e}_\theta + r\ddot{\theta}\bar{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\bar{e}_r\end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{e}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$



İvmenin θ bileşeni alternatif olarak

$$a_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$$

şeklinde yazılabilir. Parçacığın açısal momentumu göz önüne alındığında bu formu kullanmak daha yararlı olmaktadır.



Şimdi parçacık A noktasından A' noktasına giderken hız vektöründe meydana gelen değişimlere bakalım:

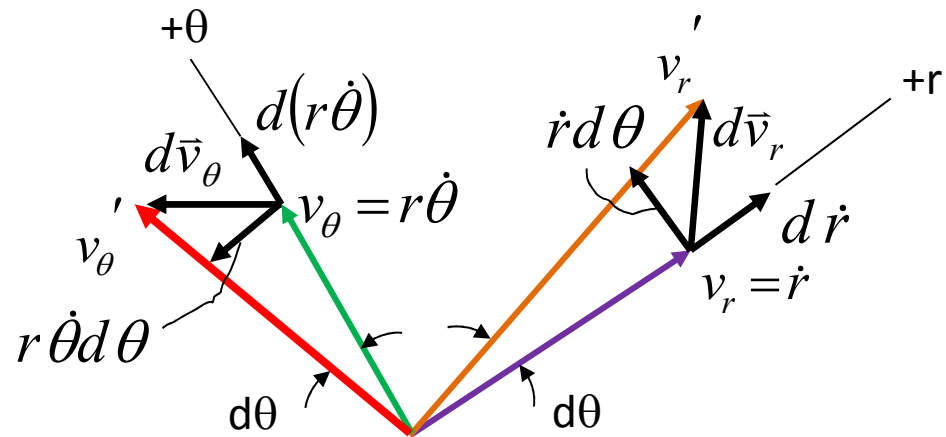
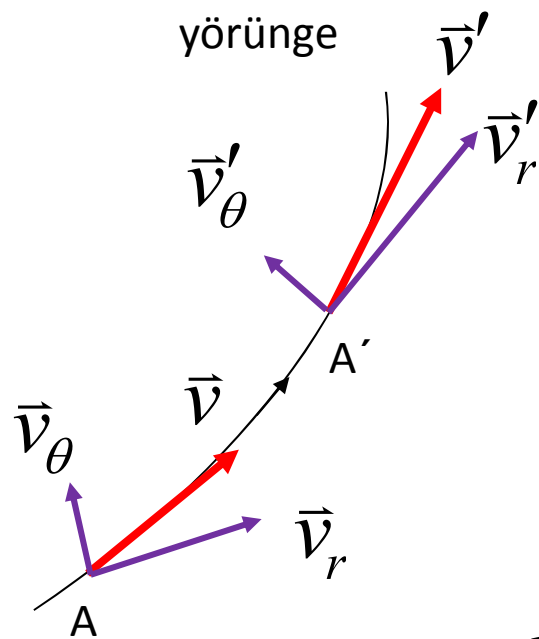
$\vec{v}_r$ 'nin şiddetindeki değişim: $\vec{v}_r$ 'nin boyundaki uzama veya kısalmadır ve $d\dot{r}$ 'ya eşittir. Buna karşılık gelen ivme terimi $\frac{d\dot{r}}{dt} = \ddot{r}$, +r yönündedir.

$\vec{v}_r$ 'nin yönündeki değişim: Bu değişimin şiddeti $v_r d\theta = \dot{r} d\theta$ 'dir ve ivmeye katkısı $\dot{r} \frac{d\theta}{dt} = \dot{r} \dot{\theta}$ 'dır, + θ yönündedir.

$\vec{v}_\theta$ 'nin şiddetindeki değişim: $\vec{v}_\theta$ 'nin boyundaki uzama veya kısalmadır, ivmeye katkısı $\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ 'dır ve + θ yönündedir.

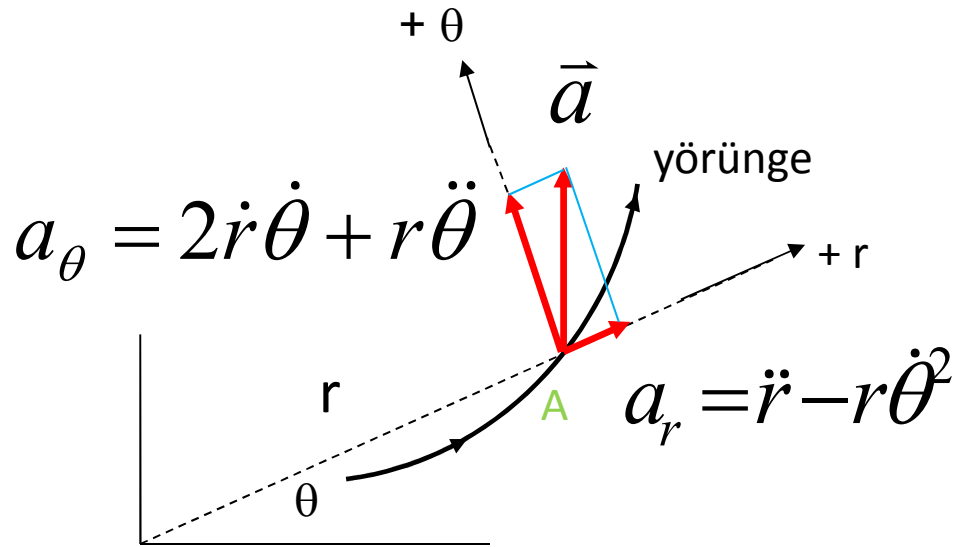
$\vec{v}_\theta$ 'nin yönündeki değişim: Bu değişimin şiddeti $v_\theta d\theta = r\dot{\theta} d\theta$ 'dır, ivmeye katkısı $r\dot{\theta} \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}^2$ 'dır, -r yönündedir.





Tüm bu terimler toplandığında $a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ ve $a_\theta = (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$ elde edilir. $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ 'da herhangi bir değişimin olmadığı durumda parçacığın radyal yöndeki ivmesidir. $-r\dot{\theta}^2$, r 'nin dairesel hareketteki gibi sabit olduğu durumda ivmenin normal bileşenini gösterir. $-r\ddot{\theta}$, r 'nin sabit olması durumunda parçacığın teğetsel ivmesidir, ama r 'nin değişken olması durumunda $\vec{v}_\theta$ 'nın şiddetindeki değişimden ortaya çıkan ivmenin yalnızca bir kısmını oluşturur. Son olarak $2\dot{r}\dot{\theta}$, iki etkinin toplamından oluşmaktadır; ilki, r 'deki değişim nedeniyle $\vec{v}_\theta$ 'nin $d(r\dot{\theta})$ şiddetindeki değişimden olan etkidir, ikincisi ise $\vec{v}_r$ 'nin yönündeki değişimden olan etkidir.



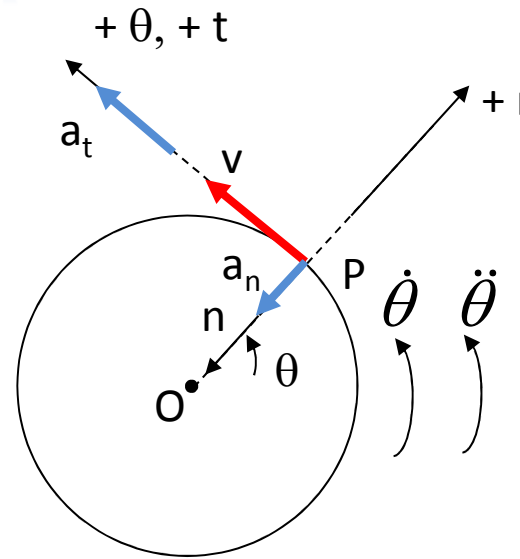


Toplam $\vec{a}$ ivmesiyle onun bileşenleri şekilde gösterilmiştir. Eğer $\vec{a}$ 'nın yörüngeye normal yönde bir bileşeni var ise, normal – teğetsel koordinatlardan bu bileşenin yörünge'nin eğrilik merkezine yönelik olacağını biliyoruz.



DAİRESEL HAREKET

r 'nin sabit olduğu
daireSEL hareket
durumunda,



$$\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta \quad (\dot{r} = 0) \quad \boxed{\bar{v} = r\dot{\theta}\bar{e}_\theta} \quad [\bar{v} = \rho\dot{\beta}\bar{e}_\theta]$$

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{e}_\theta$$

$$\boxed{\bar{a} = -r\dot{\theta}^2\bar{e}_r + r\ddot{\theta}\bar{e}_\theta}$$

$$[\bar{a} = -\rho\dot{\beta}^2\bar{e}_r + \rho\ddot{\beta}\bar{e}_\theta]$$



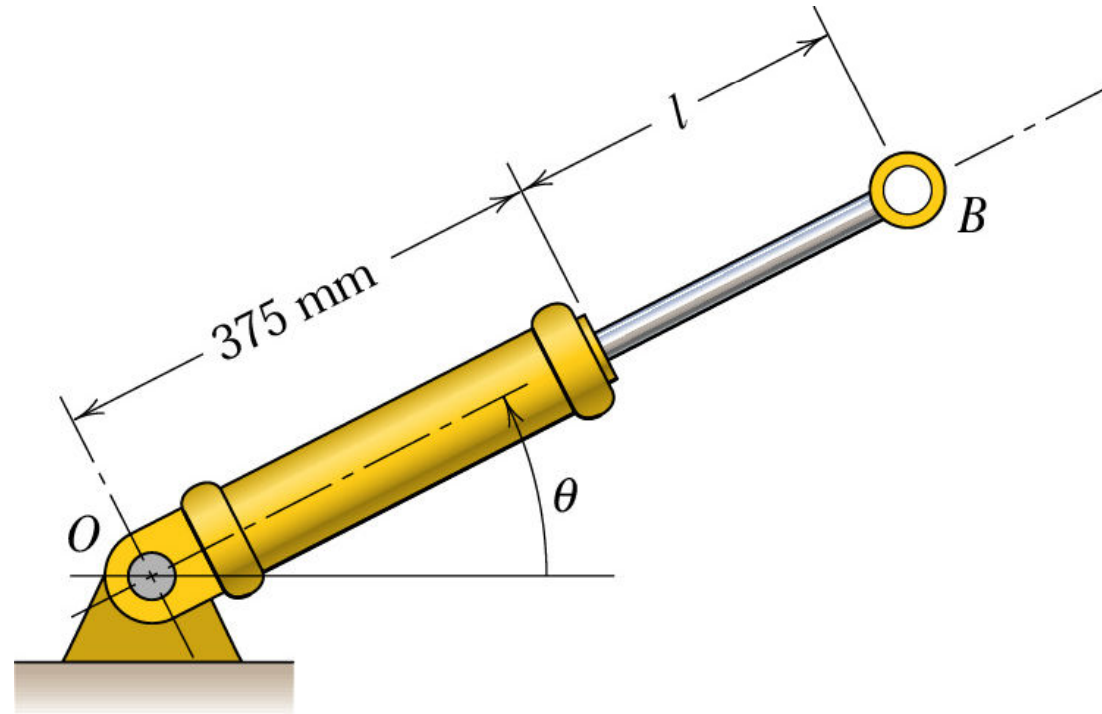
Burada r ile n aynı doğrultuda, ters yönlerde,
 θ ile t aynı doğrultu ve yönlerdedir.

a_r ve a_θ terimleri, $x=r\cos\theta$ ve $y=r\sin\theta$
koordinat bağıntılarının $a_x = \ddot{x}$ ve $a_y = \ddot{y}$
elde etmek üzere türevlerinin alınmasıyla da
elde edilebilir. İvmenin dik bileşenlerinin her
biri daha sonra r ve θ bileşenlerine ayrılıp
düzenlenerek polar koordinatlarda ivme
ifadesi elde edilir.



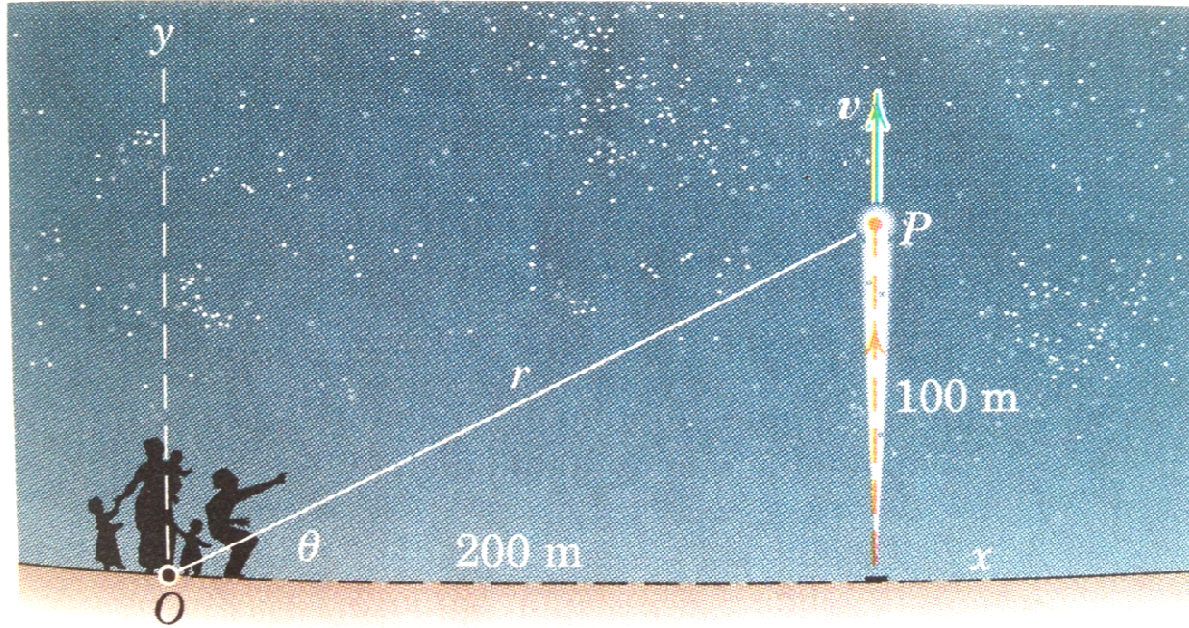
PROBLEMLER

1. Hidrolik silindir O etrafında dönerken, piston kolunun l uzunluğu silindirdeki yağ basıncı ile kontrol edilmektedir. Silindir sabit $\dot{\theta} = 60$ derece/s açısal hızında dönüyor ve l 150 mm/s sabit oranında azalıyor. $l=125$ mm olduğu anda B noktasının hızını ve ivmesini hesaplayınız.



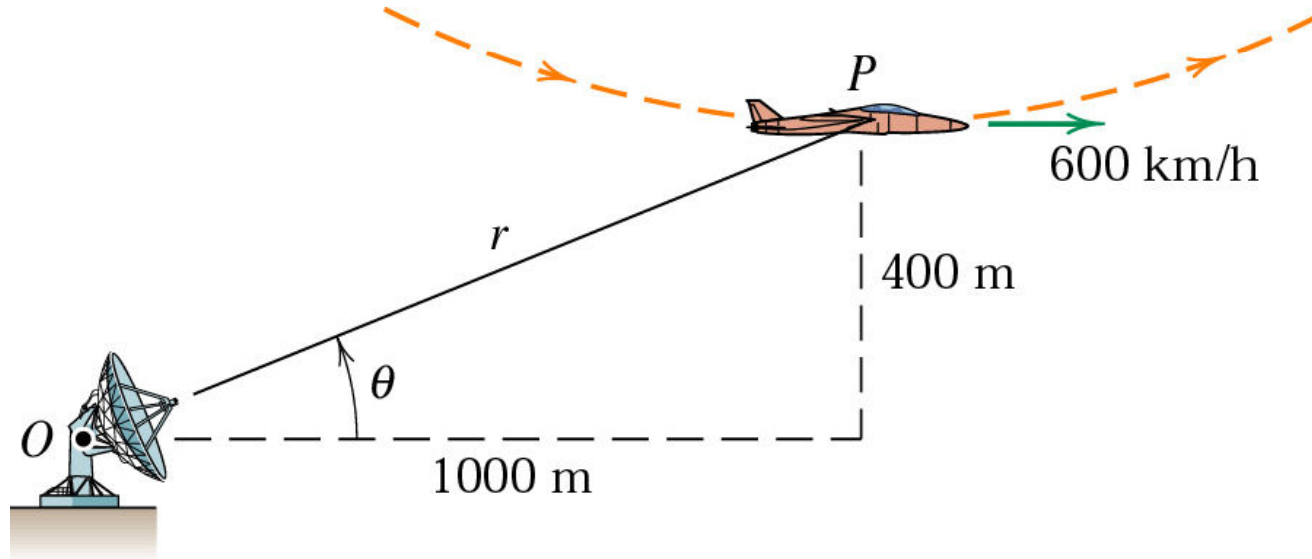
PROBLEMLER

2. Yukarı doğru düşey olarak fırlatılan fişğin y yönünde $a = -g - kv^2$ ile tanımlanmış ivmesi bulunmaktadır. İvmenin ikinci terimi aerodinamik direnç kuvveti nedeniyle oluşmaktadır. Görülen anda fişğin hızı 15 m/s ise ona karşılık gelen r , $\dot{r}$, $\ddot{r}$, θ , $\dot{\theta}$ ve $\ddot{\theta}$ değerlerini hesaplayınız. Direnç parametresi k sabit olup 0.01 m^{-1} değerindedir.



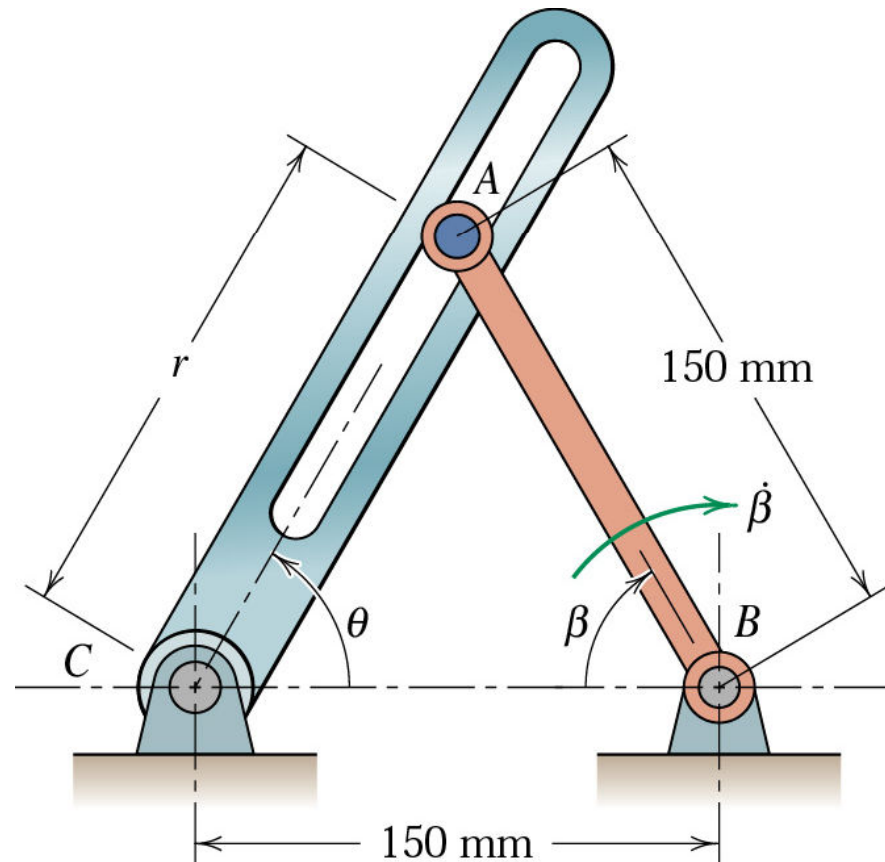
PROBLEMLER

3. Düşey (r - θ) düzleminde yer alan eğrisel yolun 400 m yükseklikteki en alt noktasında, P uçağı yatay 600 km/h hıza sahip olup yatay ivmesi bulunmamaktadır. Eğrinin eğrilik yarıçapı 1200 m'dir. O noktasındaki radar tarafından kaydedilen $\dot{r}$ ve $\dot{\theta}$ değerlerini bu an için belirleyiniz.



PROBLEMLER

4. AB kolu, β , açısının sınırlı bir aralığında dönmektedir ve ayrıca A ucu AC kanallı kolun dönmesini sağlamaktadır. $\beta=60^\circ$ ve sabit $\dot{\beta} = 0.6 \text{ rad/s}$ olduğu an için $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ ve $\ddot{\theta}$ değerlerini belirleyiniz.



PROBLEMLER

5. $t=0$ 'da , beyzbol topu 30 m/s hız ile yatayla 30° açı yapacak şekilde atılmaktadır. $t=0.5$ s olduğu anda, r , $\dot{r}$, $\ddot{r}$, θ , $\dot{\theta}$ ve $\ddot{\theta}$ değerlerini hesaplayınız.

