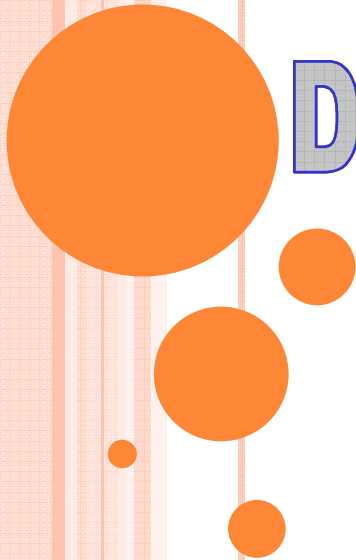


PARÇACIĞIN KİNEMATİĞİ

Düzlemde Eğrisel Hareket

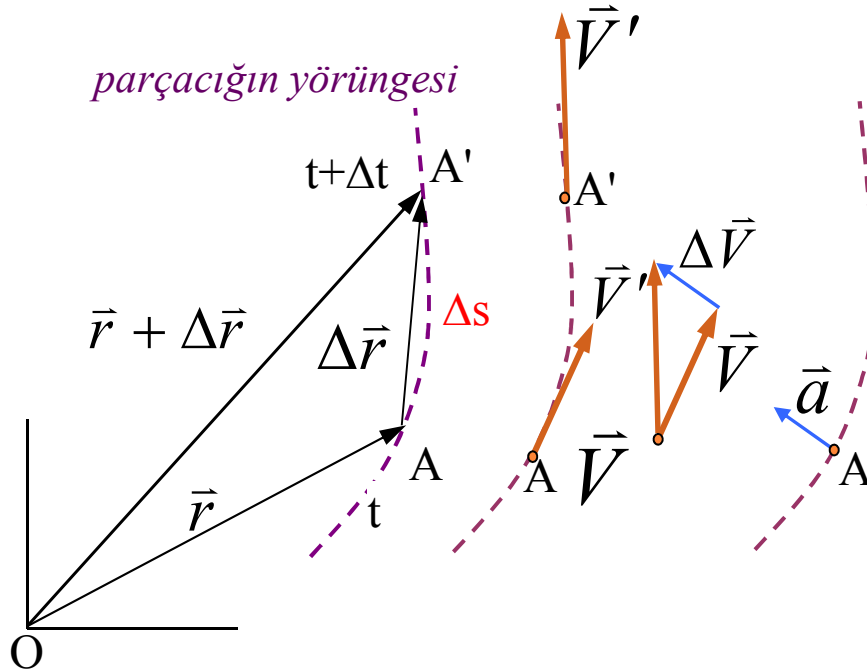


Düzlemde eğrisel hareket, parçacığın tek bir düzlem içerisinde eğrisel bir yörünge boyunca yaptığı harekettir.

Belirli bir koordinat sisteminde tanımlamadan önce, sonuçların koordinat sisteminden bağımsız olması nedeniyle hareketi vektörel analiz ile belirlemek doğru olur.

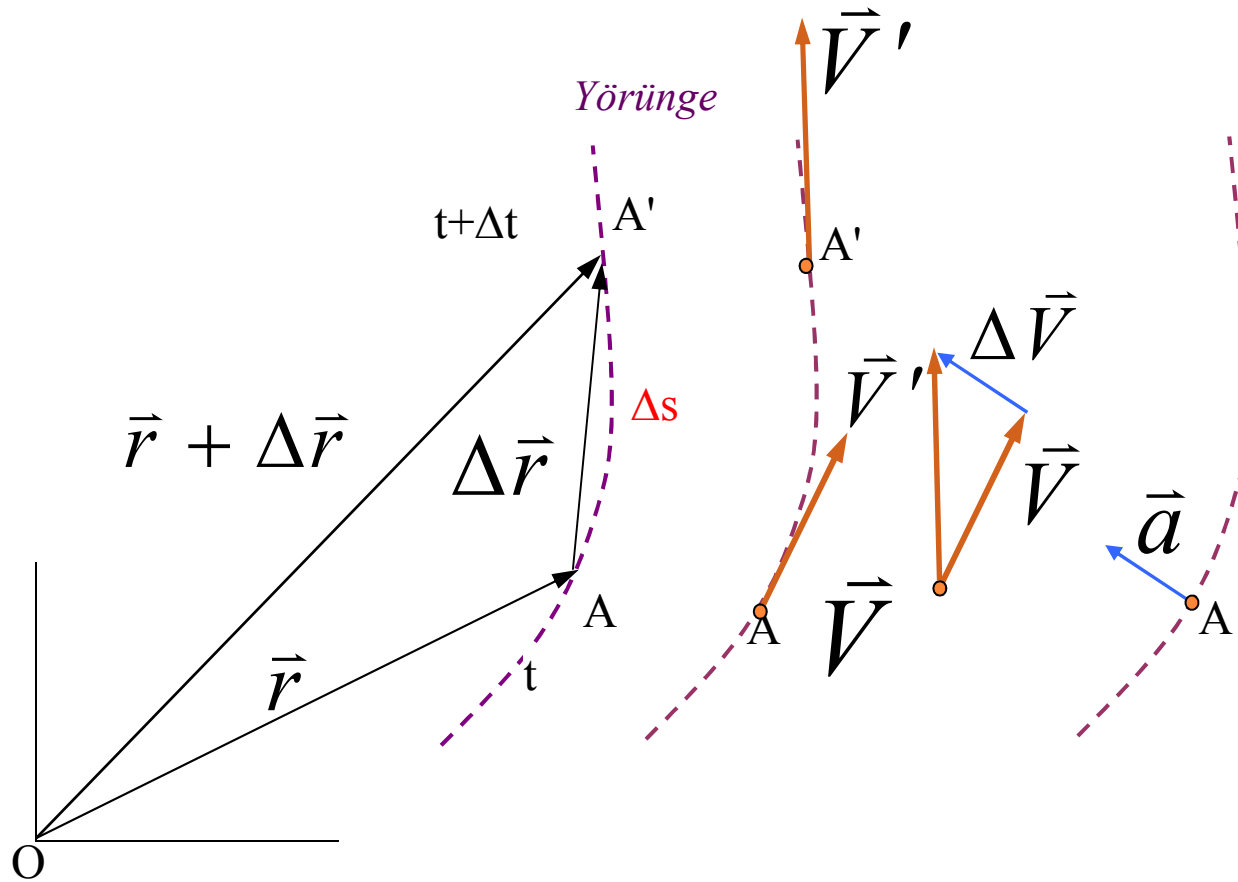


Eğrisel yörünge izleyen bir parçacık, t anında konum vektörü $\vec{r}$ olarak belirlenen bir A noktasında olsun. $\vec{r}$, sabit bir koordinat takımının başlangıç noktasından ölçülmektedir. $\vec{r}$ 'nin şiddeti ve yönü belli ise parçacığın konumu tamamen tanımlanmıştır. $t+\Delta t$ anında parçacık A' noktasına gelir, bu anda konum vektörü $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ olsun.



Δt zaman aralığı içinde parçacığın **yer değiştirmesi** $\Delta\vec{r}$ 'dir. Vektörel bir ifadedir ve konumdaki vektörel değişimi ifade eder.

Başlangıç noktasından bağımsızdır. Başlangıç noktası olarak başka bir nokta seçilmiş olsaydı konum vektörleri değişecek ama $\Delta\vec{r}$ aynı kalacaktı. Parçacığın A'dan A'ye giderken kat ettiği mesafe ise skaler Δs büyüklüğüne eşittir. $\Delta\vec{r}$ ile Δs 'i ayırt etmek önemlidir.



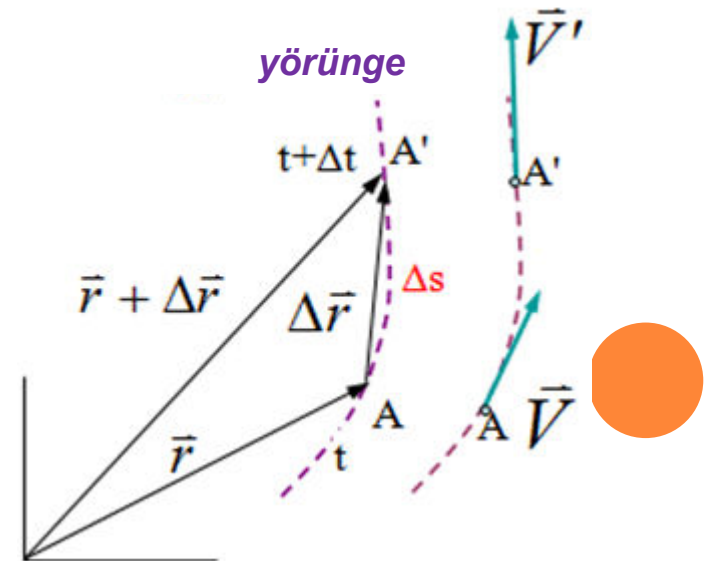
Hız (Velocity)

Parçacığın Δt süresince **ortalama hızı (average velocity)**

$$\vec{v}_{ort} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$
$$\vec{v}_{ort} , \Delta \vec{r} \text{ ile aynı yöndedir ve şiddeti } \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \text{ 'dir . A ile A' arasındaki ortalama sürat ise } \Delta s / \Delta t \text{ olacaktır.}$$

Δt azalıp A, A'ne ne kadar yaklaşırsa $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ve $\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$ de

birbirine yakın değerler alır ve sürat ile hızın şiddetleri birbirine yaklaşır.

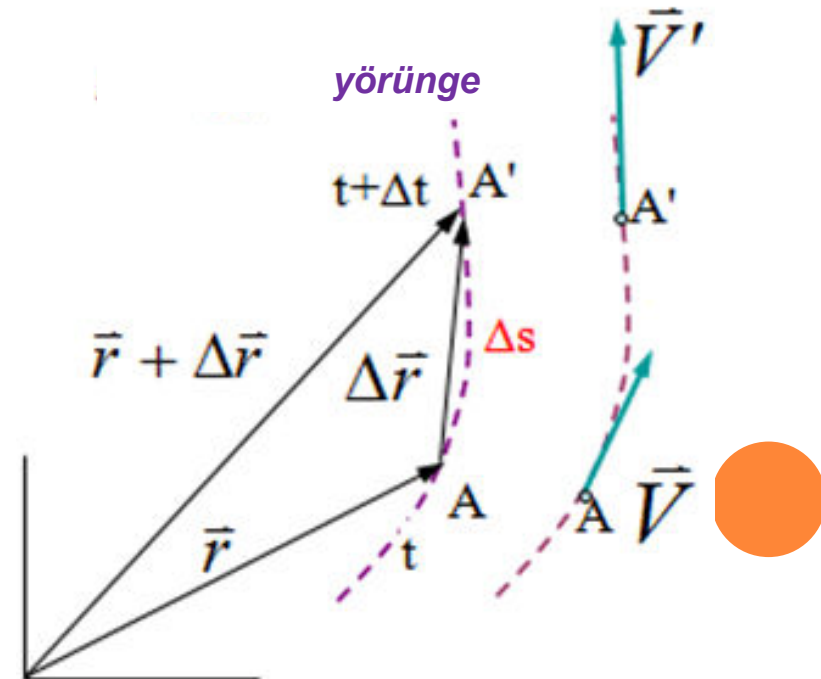


Parçacığın **ani hızı (anlık hız—instantaneous velocity)** ise

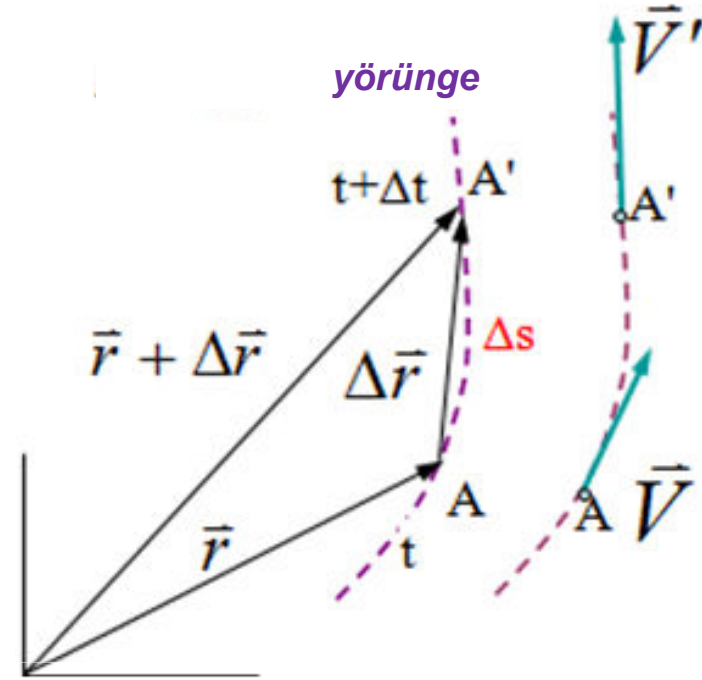
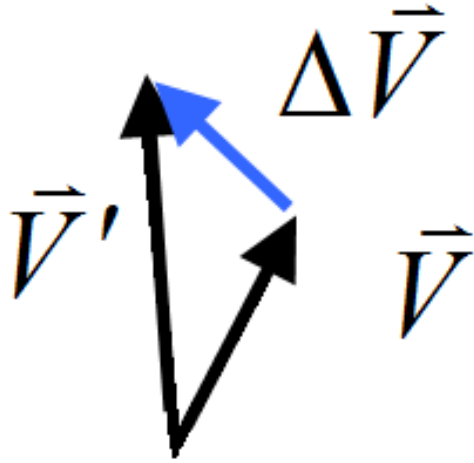
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

olacaktır. Δt sıfıra yaklaşırken yönü **yörüngeye teğet** hale gelir. Bu nedenle hız her zaman yörüngeye teğettir. $\vec{v}$ 'nin şiddeti **sürat** (speed) olarak tanımlanır ve

$$v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$



İvme (Acceleration)



A'da ve A'de *yörüngeye teğet* olan $\vec{v}$ ve $\vec{v}'$ hızlarında Δt zaman aralığı boyunca $\Delta \vec{v}$ gibi bir değişim olur.

Burada $\Delta \vec{v}$, $\vec{v}$ 'nin hem şiddetindeki hem de yönündeki değişimi gösterir. Bu nedenle bir vektörün türevi alınacağı zaman hem yönündeki hem de şiddetindeki değişim göz önüne alınmalıdır.

Parçacığın Δt zaman aralığı boyunca A - A' arasındaki *ortalama ivmesi (average acceleration)*

$$\vec{a}_{ort} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

olup yönü $\Delta \vec{v}$ ile aynıdır, şiddeti ise $\frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$ 'dir.

Parçacığın *ani ivmesi (instantaneous acceleration)*

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

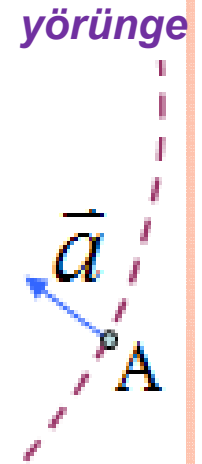
Δt küçülüp sıfıra yaklaştıkça, $\Delta \vec{v}$ 'nin yönü $d\vec{v}$ 'ye yaklaşır.



✓ İvme $\vec{v}$ ' nin **yönündeki** ve **şiddetindeki** değişimlerin etkisini içermektedir.

✓ Genel olarak ivmenin yönü ne yörüngeye teğet ne de normal (dik) ' dir. Eğer ivmeyi yörüngeye teğet ve normal olmak üzere iki bileşene ayırırsak, normal bileşenin her zaman için yörüngenin eğrilik merkezine yönelik olduğunu görürüz.

✓ Hız ise her zaman izlediği yörüngeye teğettir.



Bir parçacığın düzlemdeki eğrisel hareketini tanımlamak üzere en sıklıkla üç koordinat sistemi kullanılır. Bunlar:

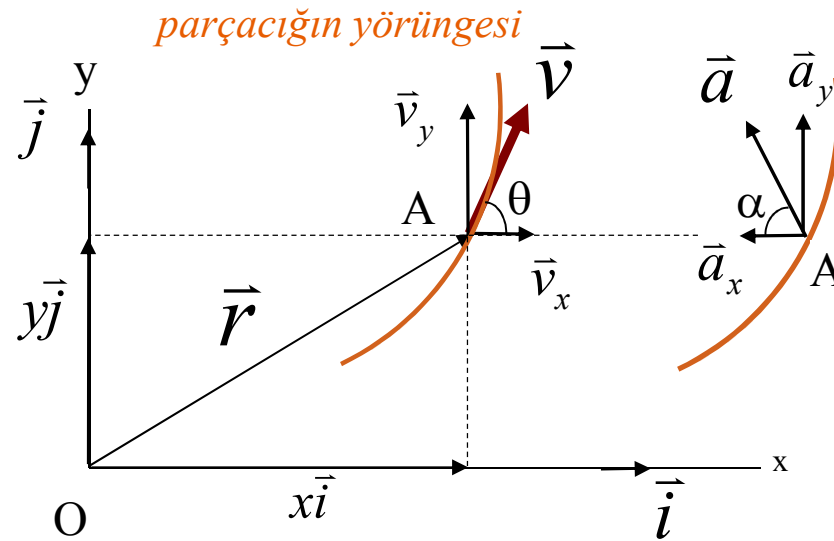
- ❖ **Kartezyen Koordinatlar**
- ❖ **Doğal (Normal – Teğetsel) Koordinatlar**
- ❖ **Polar (Kutupsal) Koordinatlar**

Bir problemin çözümünde doğru referans sisteminin seçilmesi problemin çözülebilmesi için bir ön şarttır. Seçim, hareketin tanımlanmasına veya girdilerin veriliş tarzına bakılarak yapılır.



Kartezyen (Dik) Koordinatlar

Hareketin x ve y bileşenleri birbirinden bağımsız olarak meydana geliyor veya belirleniyorsa **Kartezyen Koordinatlar** kullanılır. Eğrisel hareketin konum, hız ve ivme vektörleri x ve y bileşenlerinden oluşacak şekilde ifade edilir.



Bir parçacığın **t** anında A noktasında olduğunu varsayalım. Konum, hız ve ivme şeklindeki gibi x ve y bileşenlerine ayrılabilir:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

Zamana bağlı olarak türev alındığında birim vektörlerin şiddet ve yönleri değişmediği için türevlerinin sıfır olduğu görülür. $\vec{v}$ ve $\vec{a}$ 'nın bileşenlerinin şiddetleri ise

$$v_x = \dot{x}$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

$$v_y = \dot{y}$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

Şekilde, a_x 'in yönü -x yönünde görülmektedir. Vektörel yazılımda başına “-” işareti gelecektir.



$\vec{v}$ 'nin yönü her zaman için **yörüngeye teğettir**, ivme için böyle bir şey söylenemez.

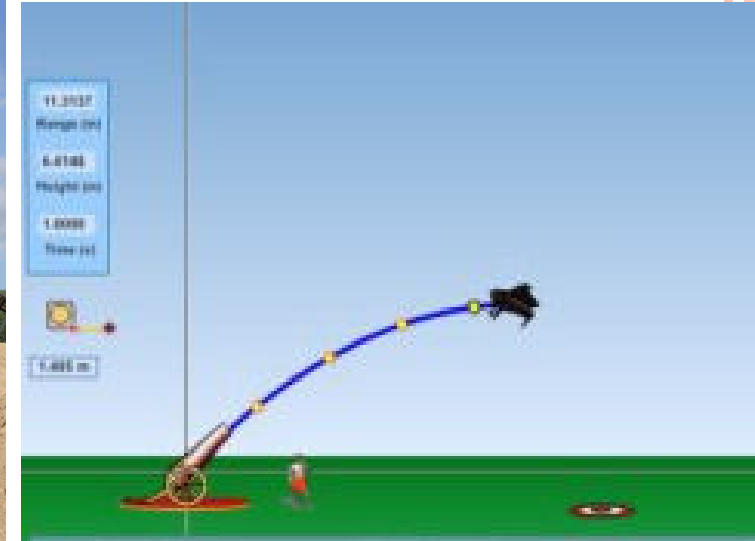
$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 & v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} & \tan \theta &= \frac{v_y}{v_x} \\ a^2 &= a_x^2 + a_y^2 & a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} & \tan \alpha &= \frac{a_y}{a_x} \end{aligned}$$

Eğer x ve y, $x=f_1(t)$ ve $y=f_2(t)$ gibi zamana bağlı fonksiyonlar olarak verilmişse, bunları birleştirerek **konum vektörü** elde edilir. Bunların 1. türevleri $\vec{v}$ 'yi, 2. türevler $\vec{a}$ 'yı verecektir veya tam tersine, a_x ve a_y biliniyorsa integral alınarak hız ve konum bileşenleri elde edilebilir. **x** ve **y** arasında **t** yok edilirse, yörünge denklemi **$y=f(x)$** olarak yazılabilir.

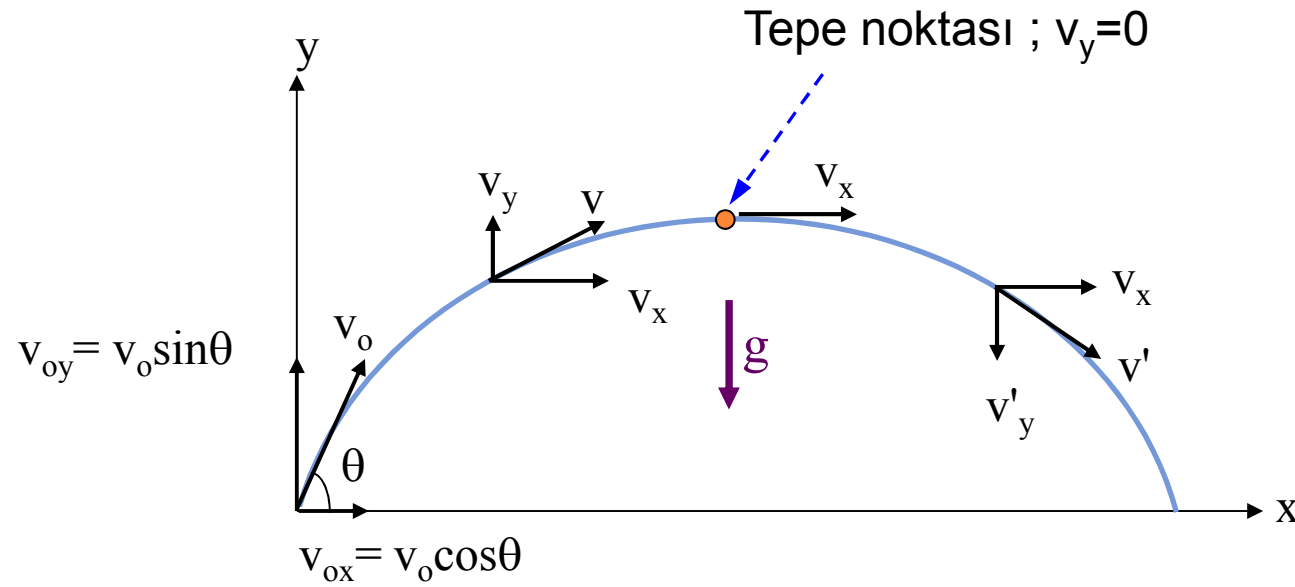


Eğik Atış Hareketi (Projectile Motion)

İki boyutlu kinematik teorisinin önemli bir uygulaması eğik atış problemidir. Öncelikle aerodinamik direnç ve dünyanın dönüşü ihmal edilir ve irtifanın yerçekimi ivmesinin sabit olarak dikkate alınabileceği kadar az olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayımlar ile kartezyen koordinatlar atış problemlerine uygulanmaktadır.



Eğik Atış Hareketi (Projectile Motion)



Bu durumda, ivme bileşenleri

$$a_x = 0 \quad , \quad a_y = -g$$



Hareket yatay ve düşey olarak ayrı ayrı incelenirse,

Yatay

$$a_x = 0$$

$$v_x = \text{sabit}$$

$$v_x = v_{0x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

Düşey

$$a_y = -g$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

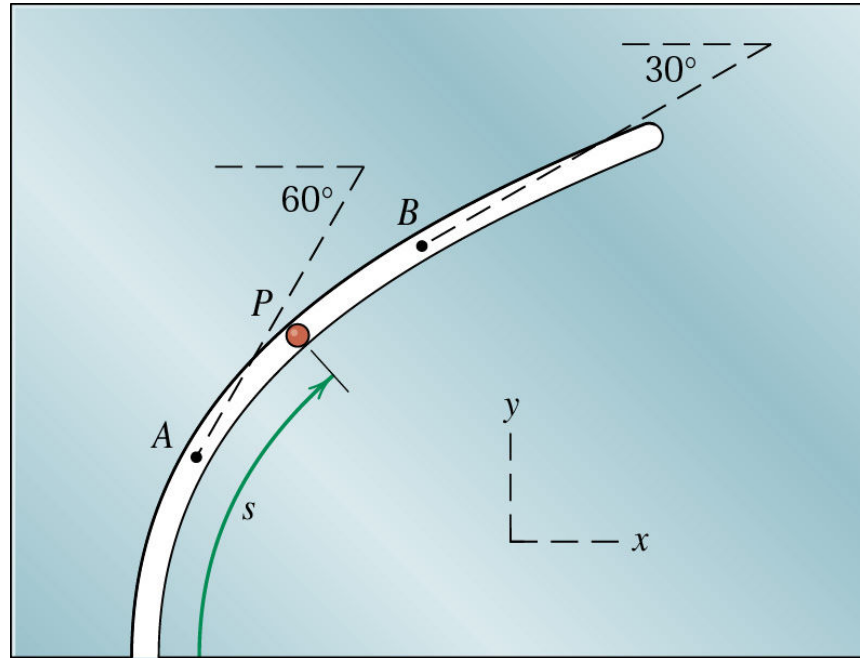
$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

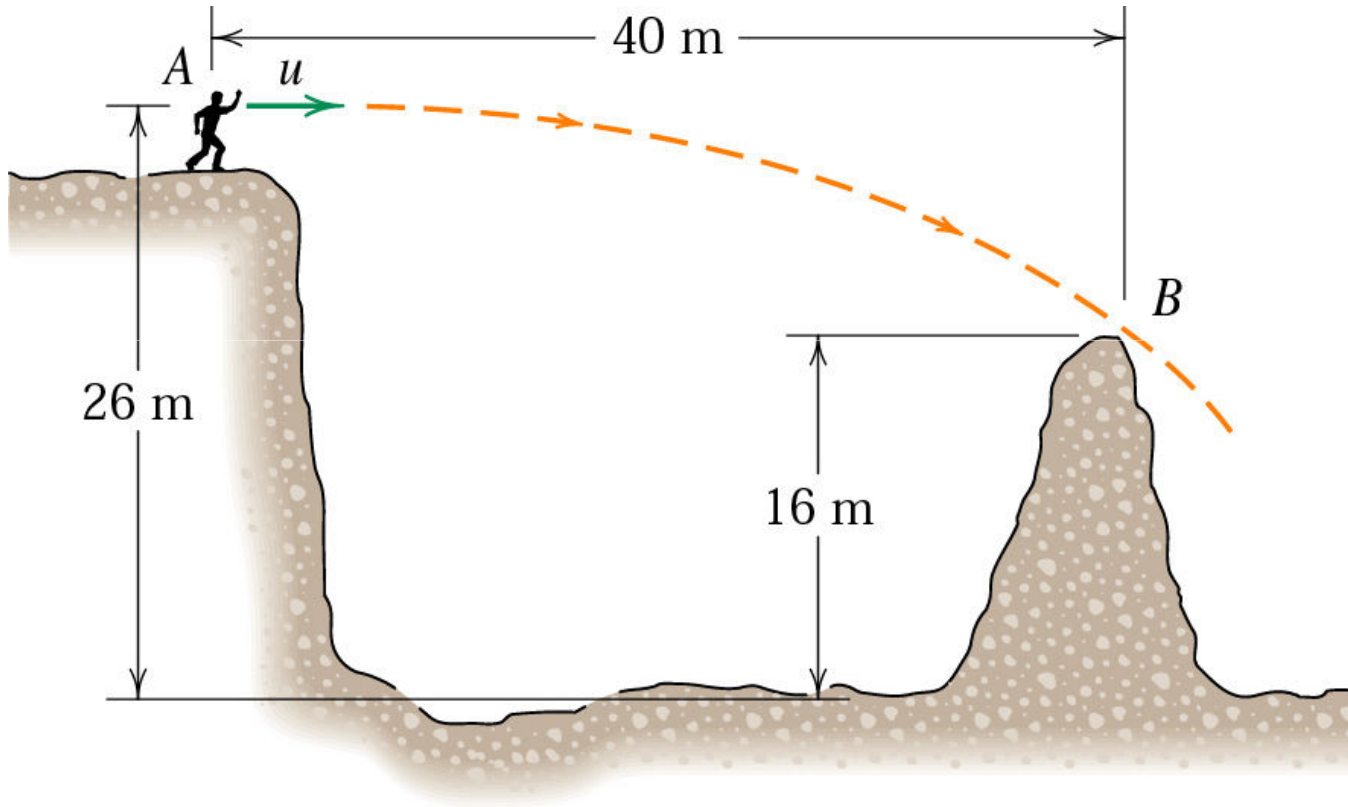
Görüldüğü gibi hareketin yatay ve düşey bileşenleri birbirinden bağımsızdır. **x** ve **y** konum koordinatları arasında zaman, **t**, yok edilirse eğrisel yörüngenin denklemi elde edilir.



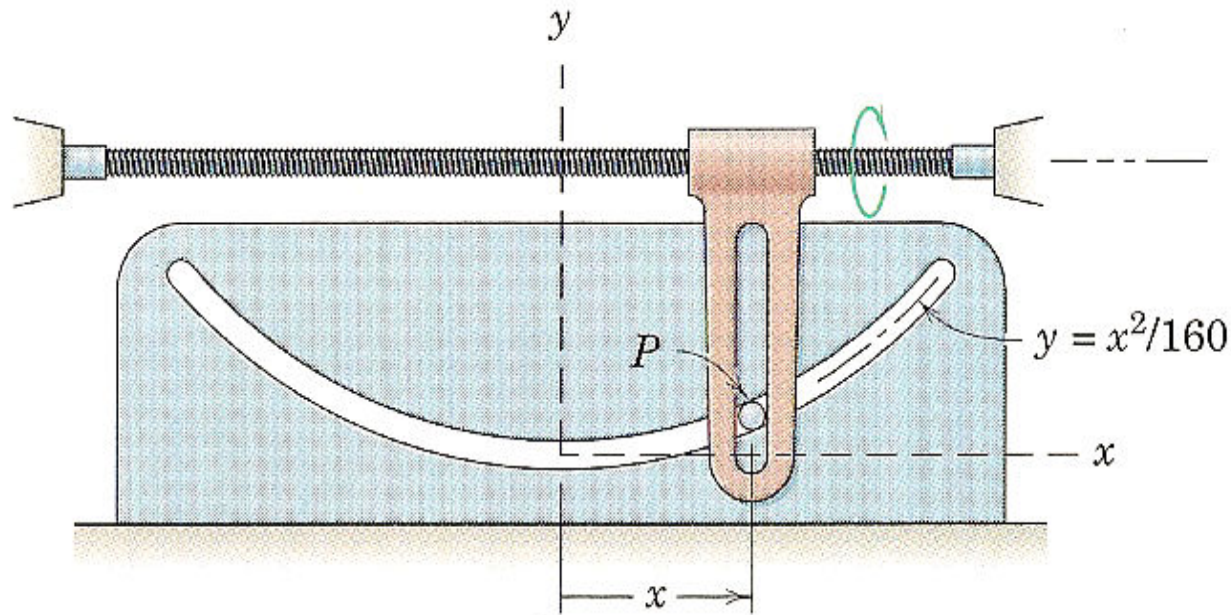
1. P parçacığı eğrisel kanal boyunca hareket etmektedir. Kanal boyunca metre cinsinden aldığı yol $s=t^2/4$ ile verilmektedir, burada t saniyedir. Parçacık $t = 2.00$ s iken A noktasında, $t = 2.20$ s iken B noktasındadır. A ve B arasında parçacığın ortalama ivmesinin şiddeti a_{av} ile kartezyen koordinatlardaki birim vektörleri kullanarak ortalama ivmesinin vektör ifadesini $\vec{a}_{av}$ belirleyiniz.



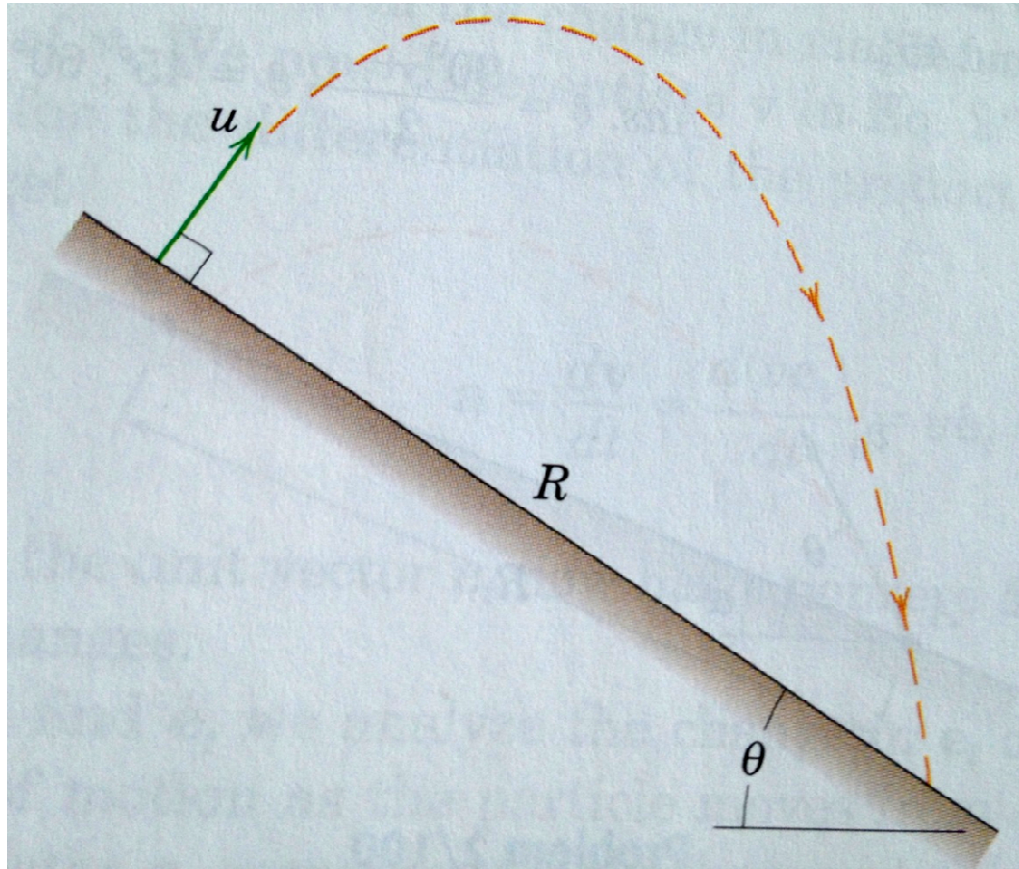
2. B'deki engelin hemen üzerinden geçmesi için A noktasından hangi yatay u hızı ile taşı fırlatmalıdır?



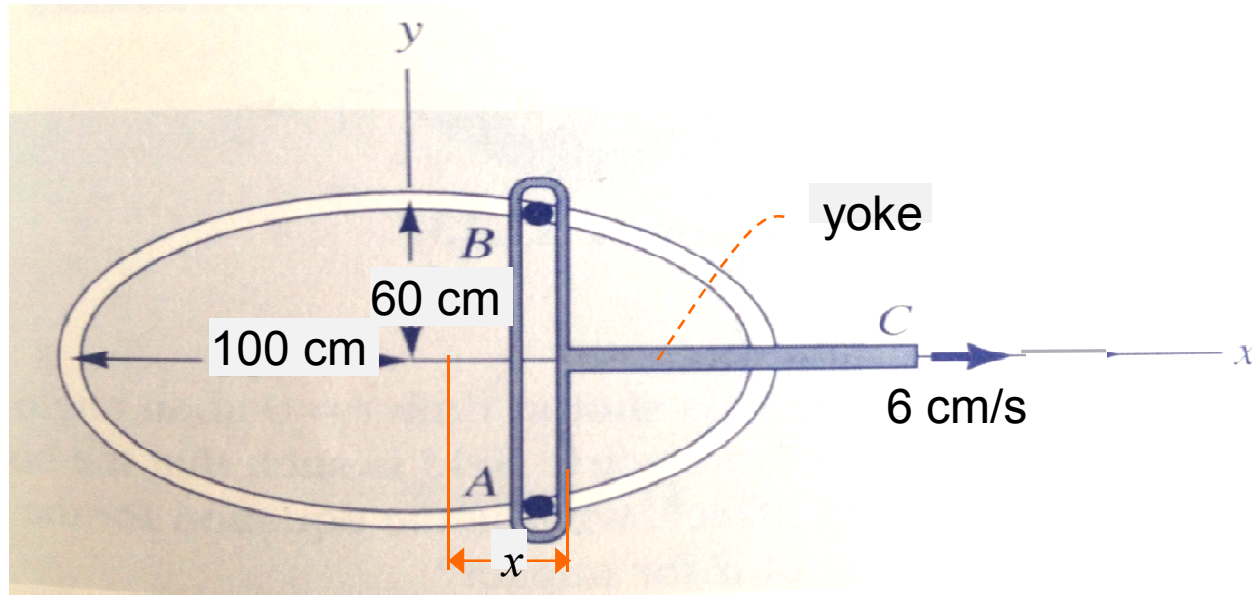
3. Belirli bir hareket aralığı için, P pimi x doğrultusunda sabit 40 mm/s ile hareket eden düşey kanallı kılavuz ile sabit parabolik kanal içerisinde harekete zorlanmaktadır. Tüm ölçüler milimetredir. $x = 60 \text{ mm}$ iken pimin hızını ve ivmesini hesaplayınız.



4. Bir mermi u hızı ile eğik düzleme dik olacak şekilde ateşlenmektedir. Eğik düzlem yatayla θ açısı yapmaktadır. Çarptığı noktaya olan R uzaklığının ifadesini türetiniz.



5. A ve B pimleri, sağa doğru 6 cm/s sabit hızla hareket eden düşey boyunduruk içinde kalarak eliptik kanal içinde harekete zorlanmaktadır. $x = 50$ cm iken pimlerin birbirine yaklaşma hızı nedir? Yine bu konum için hızın şiddetindeki değişimi hesaplayınız.



6. 7 m uzunluğundaki taşıyıcı bant yatay zemin ile α açısı yapmaktadır. B noktasından serbest olarak dökülen kum C noktasında düşmektedir. Bant $v_0 = 3$ m/s sabit hızı ile hareket etmekte ise A ve C arasındaki maksimum d mesafesi ile α açısını hesaplayınız.

