

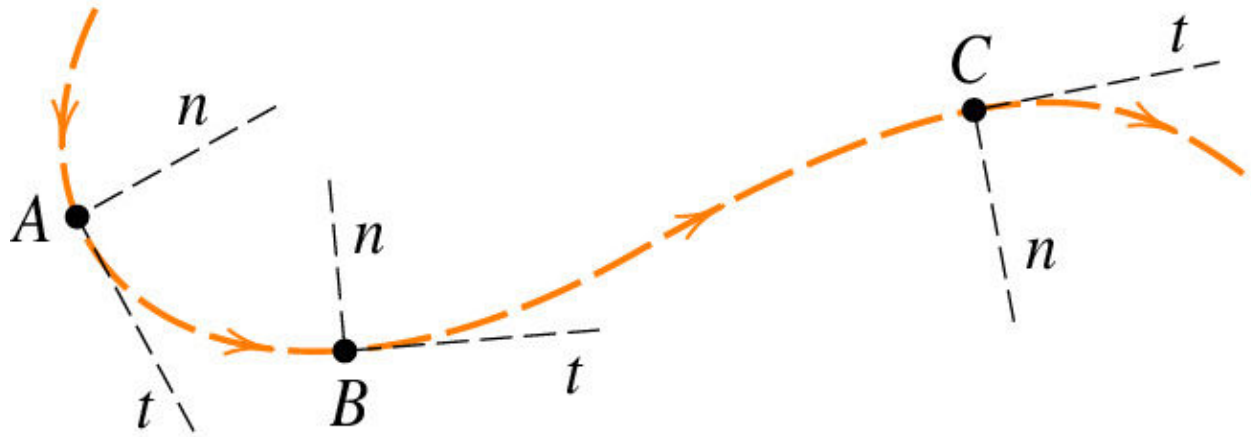
DÜZLEMSEL HAREKETTE DOĞAL KOORDİNATLAR

Normal ve Teğetsel Koordinatlar (n-t)

Eğrisel harekette çok sık kullanılan tanımlardan biri de **yörünge değişkenlerini** içerir.

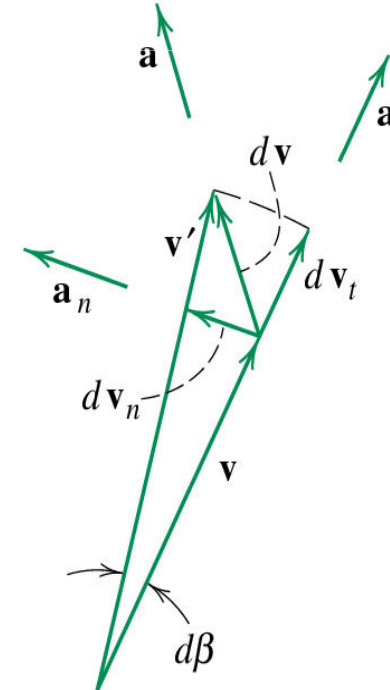
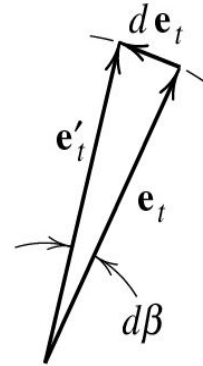
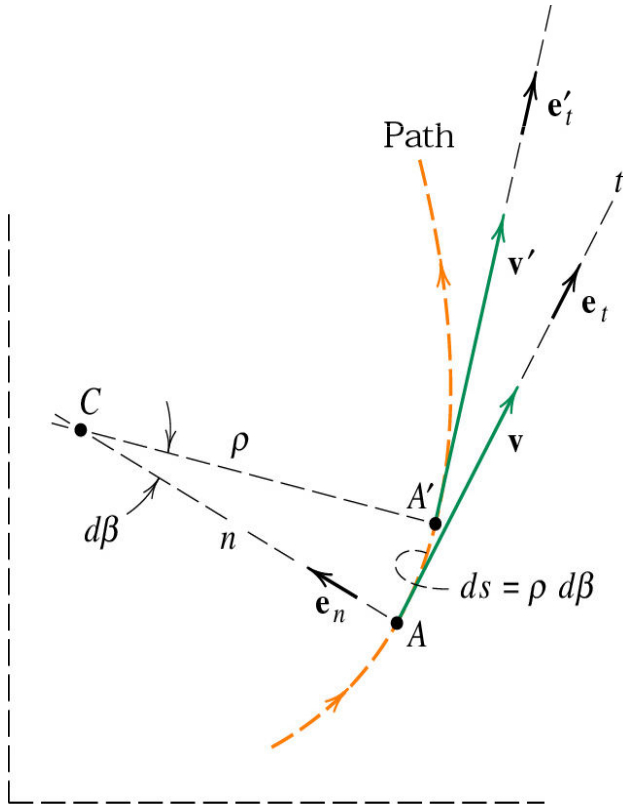
Bunlar, hareketin her bir anı için ele alınan biri yörüngeye teğet, diğeri ona dik iki koordinat eksenidir.

Eğrisel hareketin doğal bir tanımıdır ve parçacıkla beraber hareket ederler. **Bu nedenle konum vektörüne gerek duyulmaz.**



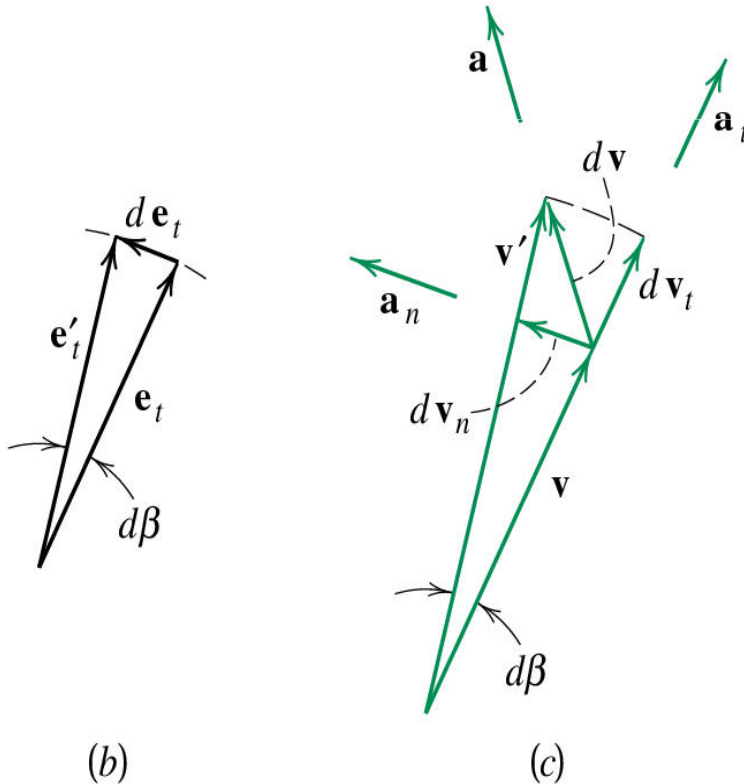
Hız herhangi harekette daima yörüngeye teğettir.

İvme de genellikle yörüngeye ne teğet ne de teğete diktir. Doğal koordinatlarda genel olarak herhangi bir yönde olan parçacığın ivmesi biri o noktadaki teğet doğrultusunda (a_t =ivmenin teğetsel bileşeni) diğeri de aynı noktada teğete, yani hıza dik (a_n =ivmenin normal bileşeni) olmak üzere iki bileşene ayırarak incelenir.



Daima hız doğrultusunda olan ivmenin teğetsel bileşeni, hız artıyorsa (+), azalıyorsa (–) alınır.

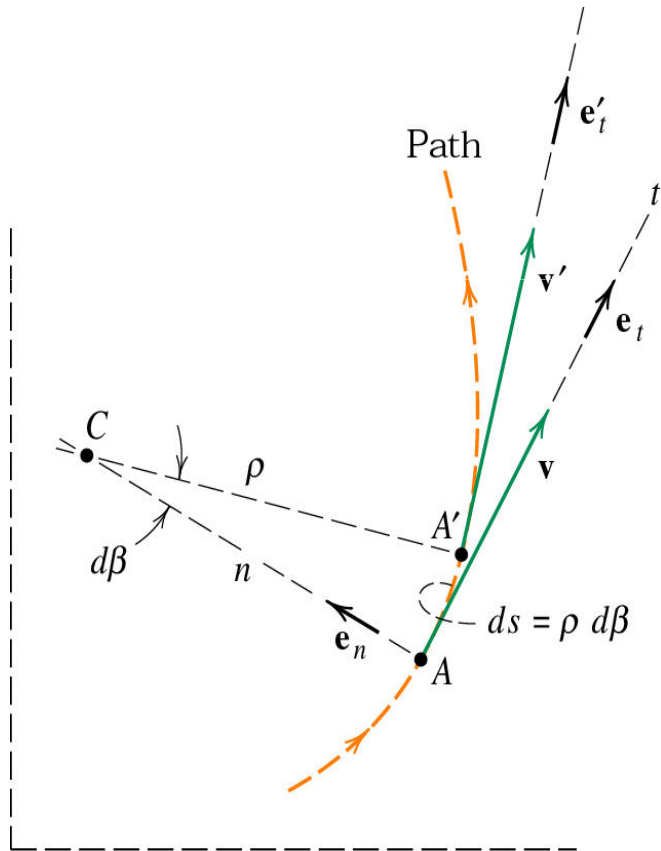
Teğetsel bileşen hızın şiddetindeki değişimin sonucudur. Normal bileşen ise söz konusu noktada yörüngeye en iyi uyan çemberin merkezine yöneliktir. İvmenin normal bileşeninin yönü merkeze yönelik (+) alınır.



HIZ :

Diferansiyel yol

$ds = \rho d\beta$ β : radyan cinsinden
 ρ 'daki değişim ihmal edilir.



$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\beta}{dt} = \rho \dot{\beta}$$

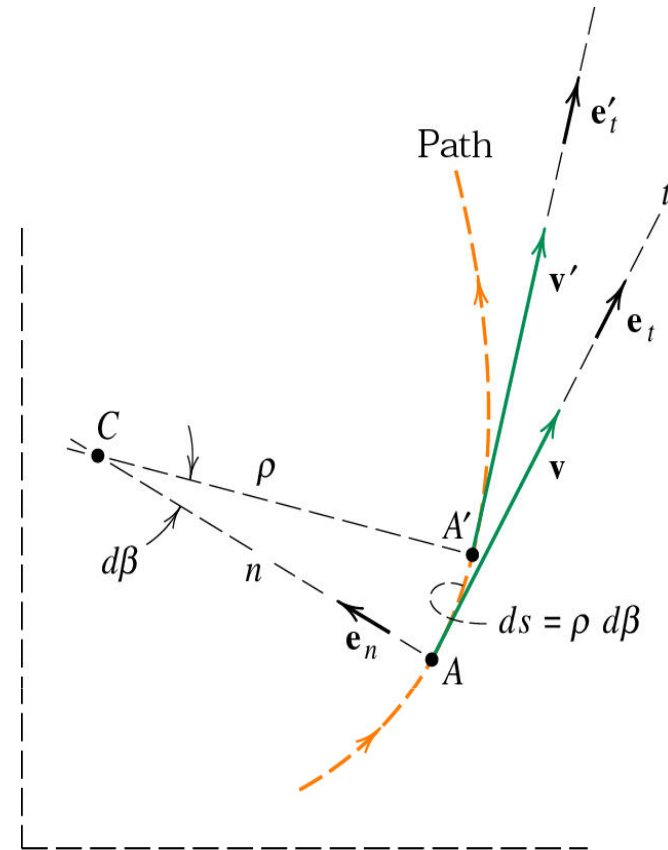
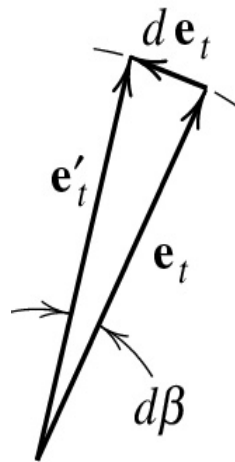
$$\vec{v} = \rho \dot{\beta} \vec{e}_t$$

İVME:

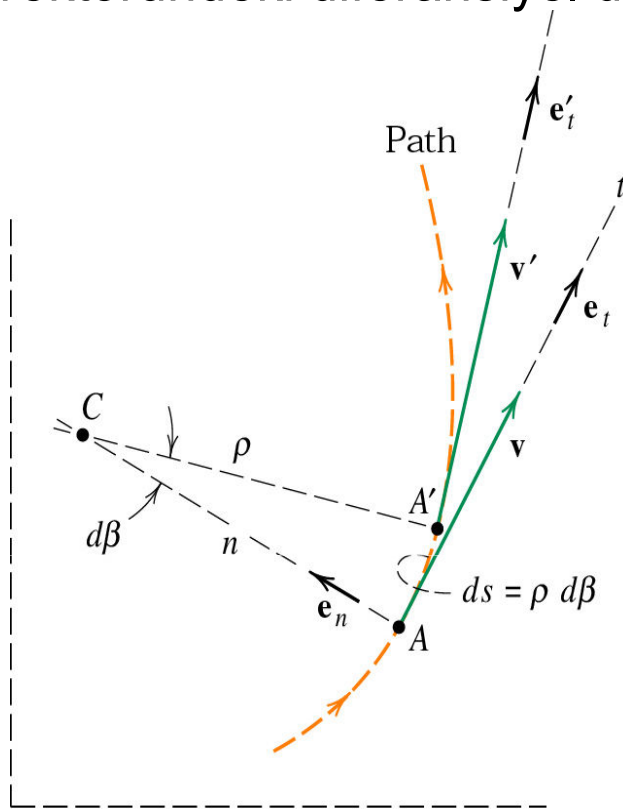
İvme hızdaki değişimdir; hızın hem şiddeti hem de yönündeki değişim göz önünde bulundurulmalıdır.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\vec{e}}_t$$

$$\dot{\vec{e}}_t = ?$$



$\dot{\vec{e}}_t$ 'yi bulmak için parçacık A'dan A' noktasına hareket ederken $\vec{e}_t$ birim vektöründeki diferansiyel değişime inceleyelim.



$d\vec{e}_t$ 'nin yönü $\vec{e}_n$ ile verilir.

$$\dot{\vec{e}}_t = \dot{\beta} \vec{e}_n$$

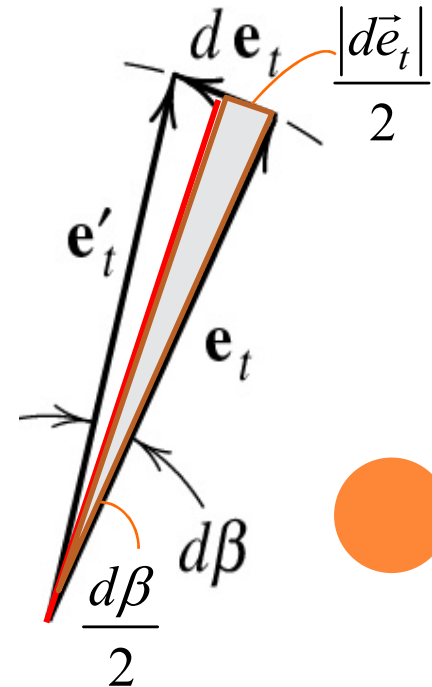
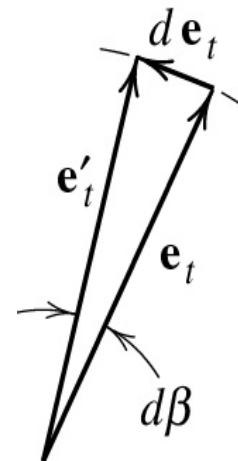
$$\dot{\vec{e}}_t = \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{d\beta} \cdot \underbrace{\frac{d\beta}{dt}}_{\dot{\beta}} \quad \frac{|d\vec{e}_t|}{d\beta} = ?$$

$$\underbrace{\sin \frac{d\beta}{2}}_{\frac{d\beta}{2}} = \frac{|d\vec{e}_t|/2}{\underbrace{1}_{|\vec{e}_t|}}$$

$$\frac{d\beta}{2} = \frac{|d\vec{e}_t|}{2}$$



$$\frac{|d\vec{e}_t|}{d\beta} = 1$$



$$\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\vec{e}}_t = \underbrace{\dot{v}}_{a_t}\vec{e}_t + \underbrace{v\dot{\beta}}_{a_n}\vec{e}_n$$

$$v = \rho\dot{\beta} \Rightarrow \dot{\beta} = \frac{v}{\rho}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\vec{e}}_t = \dot{v}\vec{e}_t + v \cdot \frac{v}{\rho}\vec{e}_n$$

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\vec{e}}_t = \dot{v}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

İvmenin şiddeti

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

a_t : hızın şiddetindeki değişim $a_t = \dot{v} = \rho\ddot{\beta} = \ddot{s}$

a_n : hızın yönündeki değişim $a_n = \frac{v^2}{\rho} = v\dot{\beta} = \rho\dot{\beta}^2$



Eğrilik Yarıçapı (Radius of Curvature):

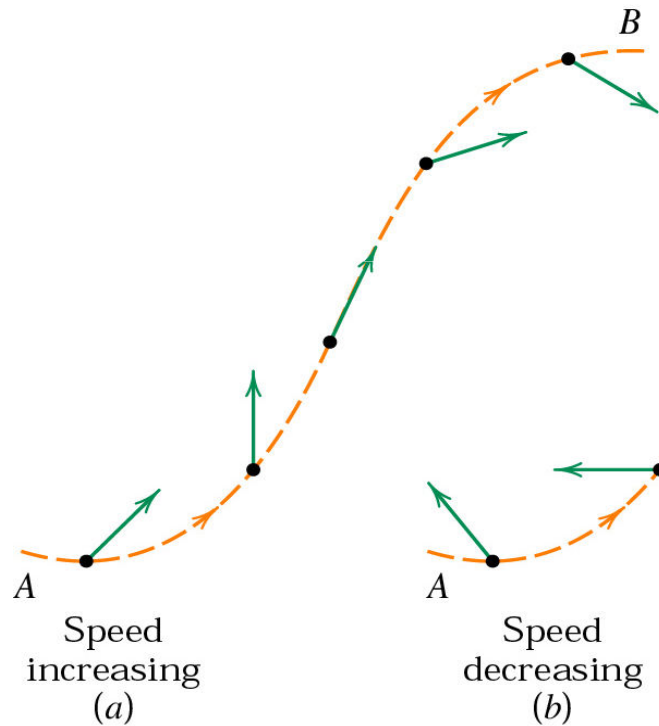
Eğer yörünge denklemi $y=f(x)$ şeklinde verilmişse eğrilik yarıçapı

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}$$

ile hesaplanır. Paydadaki mutlak değer eğrilik yarıçapının pozitif olmasını sağlar.



- ✓ a_n her zaman eğrilik yarıçapının merkezine yöneliktir.
- ✓ Buna karşın a_t hızın artıp azalmasına bağlı olarak (+) veya (-) t yönünde olabilir.



Acceleration vectors for particle moving from A to B

a_n 'nin sıfır olabilmesi için parçacığın ya bir dönüm veya büküm noktasından geçmesi veya yörünge eğrisinin geçici de olsa bir düz doğruya dönüşmesi gerekir ki böyle an ifadesindeki ρ sonsuza gider.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\infty} = 0 \quad \text{olur.}$$



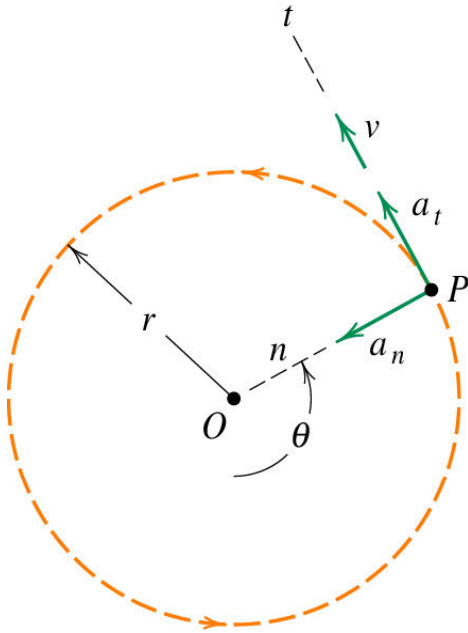
a_n' nin ρ' ya bağılı değişimi dizaynda kesinlikle göz önüne alınması gereken önemli bir parametredir.

Dizaynda ani yol değişimlerinden kaçınılması gerekir.

Uçak kanatlarının profillerinde, demiryolu kurbalarında ve yürek ya da kam mekanizmalarında bu ilkeye uyulur.



Parçacığın Dairesel Hareketinin Doğal Koordinatlara Uyarlanması



$\rho=r=\text{sabit}$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta}$$

$$a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta}$$

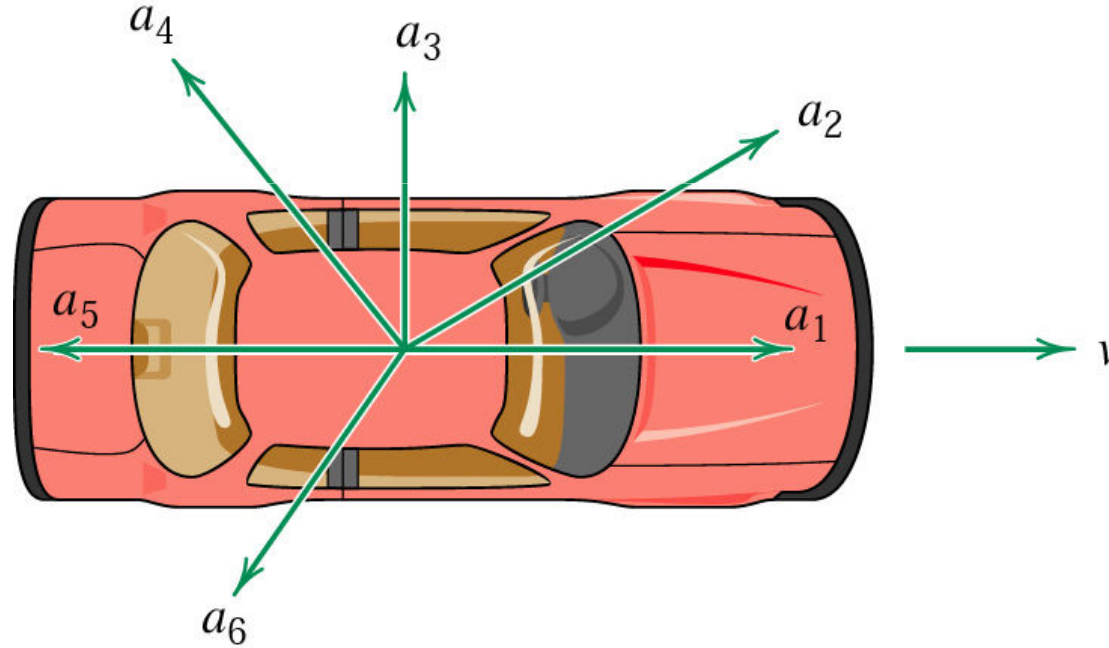
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (\text{Açısal hız-Angular velocity})$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta} \quad (\text{Açısal ivme-Angular acceleration})$$



PROBLEMLER

1. Hızı ileri doğru yönelmiş araba için Altı ivme vektörü şekilde görülmektedir. Her ivme durumu için arabanın anlık hareketini açıklayınız.



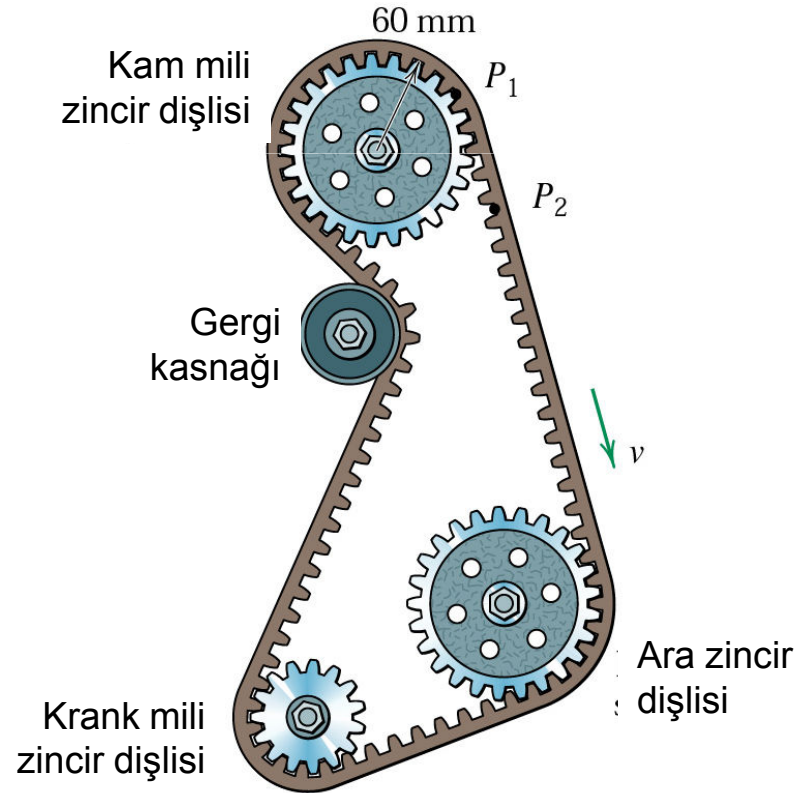
PROBLEMLER

2. Bir tren 100 km/h hızla yatay eğrisel bir yola girmekte ve hızı 12 saniye içinde sabit yavaşlama ivmesi ile 50 km/h'e düşmektedir. Trene monte edilmiş ivmemetre tren eğrisel yola girdikten 6 saniye sonra 2 m/s^2 değerini kaydetmiştir. Bu an için yolun ρ eğrilik yarıçapını hesaplayınız.



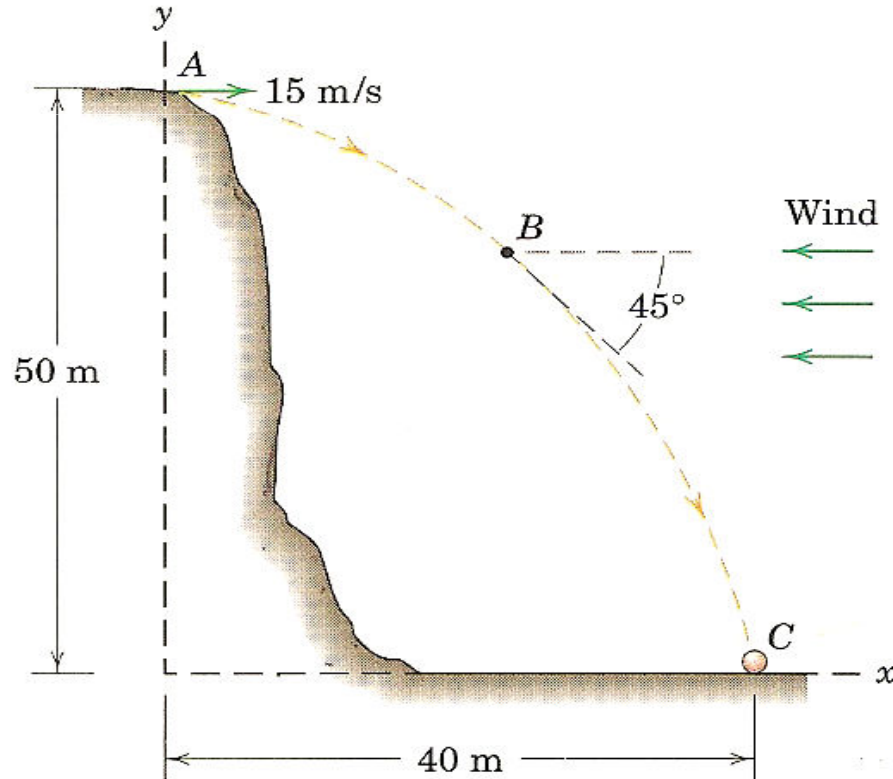
PROBLEMLER

3. Dört silindirli bir otomobil motorunun kam mili tahrik sisteminin tasarımı şekilde görülmektedir. Motor hızını artırırken, iki saniyelik bir zaman aralığında kayışın v hızı from 3 m/s'den 6 m/s'ye **düzgün bir şekilde** değişmektedir. Bu zaman aralığının ortasında P_1 ve P_2 noktalarının ivmelerinin şiddetlerini hesaplayınız.



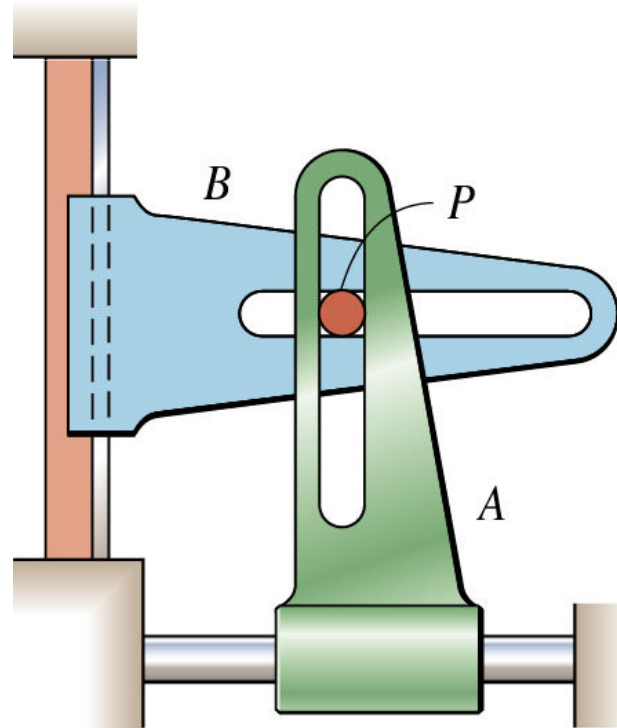
PROBLEMLER

4. Bir top, 50 m'lik uçurumun tepesinden yatay olarak 15 m/s hız ile atılmakta ve C noktasına düşmektedir. Kuvvetli rüzgar nedeniyle, top negatif x -yönünde sabit bir ivmeye sahiptir. Yörünge eğrisinin yatayla 45° açısı yaptığı B noktasında topun izlediği yolun ρ eğrilik yarıçapını belirleyiniz. Düşey doğrultudaki herhangi bir hava direnci etkisini ihmal ediniz.



PROBLEMLER

5. P pimi, birbirine dik olarak hareket eden iki kanallı kılavuz içerisinde harekete zorlanmaktadır. Görülen anda, A sağa doğru 0.2 m/s hıza sahip olup bu hız her saniye 0.75 m/s oranında azalmaktadır. Aynı anda, B aşağı doğru 0.15 m/s hızla hareket etmekte ve bu hızı her saniye 0.5 m/s oranında azalmaktadır. Bu an için P'nin izlediği yörüngenin ρ eğrilik yarıçapını hesaplayınız.



PROBLEMLER

6. PO krankı üzerindeki P pimi C kılavuzundaki yatay kanal içinde kalarak kılavuzun sabit düşey şaft üzerindeki hareketini kontrol etmektedir. θ açısının verilen bir değeri için C kılavuzunun $\dot{y}$ hızını ve $\ddot{y}$ ivmesini hesaplayınız.

(a) $\dot{\theta} = \omega$ ve $\ddot{\theta} = 0$

(b) Eğer $\dot{\theta} = 0$ ve $\ddot{\theta} = \alpha$

