2. PARÇACIK KİNEMATİĞİ

→ Kinematik analiz, cismin hareketine sebep olan etkileri düşünmeyerek yalnızca ortaya çıkan hareketin geometrisiyle ilgilenir.

→ Kinematiğin bazı mühendislik uygulamaları, istenen belirli hareketleri kontrol etmek veya üretmek için kamların, dişlilerin, bağlantıların ve diğer makine elemanlarının tasarımını ve uçaklar, roketler ve uzay araçları için uçuş yörüngelerinin hesaplamasını içermektedir. Tam bir kinematik bilgisi, hareket ve harekete neden olan veya eşlik eden kuvvetler arasındaki ilişkileri inceleyen kinetiğin ön şartıdır.

→ Kinematik analiz, cismin verilen herhangi bir andaki

1. Konum ($\vec{r}$)
2. Yer değiştirme ($\Delta\vec{r}$, $d\vec{r}$)
3. Hız ($\vec{v}$)
4. İvme ($\vec{a}$)

kinematik büyüklüklerinin belirlenmesi olarak tanımlanır ve kinematik büyüklükler, vektörel büyüklüklerdir.

→ Parçacık olarak modellenen cisimlerin hareketlerinin kinematik analizi bu bölümün konusunu oluşturmaktadır.

→ Cismin hareketi, kütle merkezinin hareketiyle ifade edilebiliyor ve herhangi bir dönme hareketi ihmal edilebiliyorsa, bu cisimler parçacık (veya maddesel nokta) olarak modellenebilir.

→ Buna göre, parcacık yalnızca ötelenme (ilerleme) hareketi yapar. Parcacık bir temas düzlemi üzerinde ise bu ötelenme hareketi "kayarak ötelenme" veya "sürüklenme" olarak da tanımlanır.

→ Bir parcacığın hareketi pek cok şekilde tanımlanabilir ve en kullanışlı veya uygun secim büyük oranda tecrübeye ve verilerin nasıl verildiğine bağlıdır.

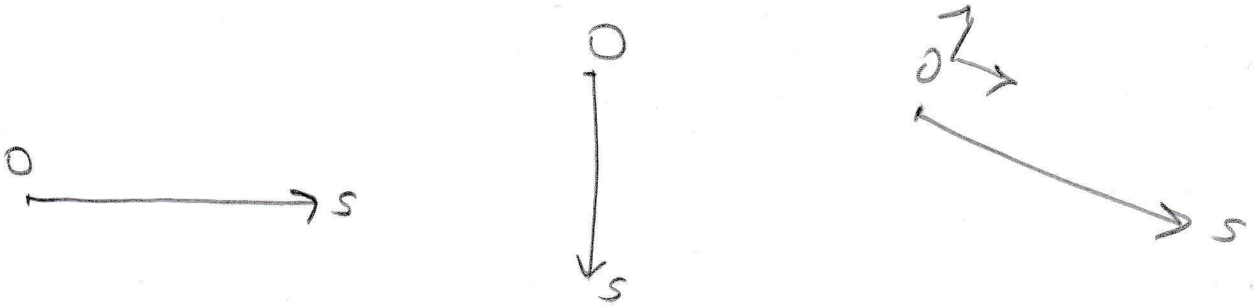
→ Eğer parcacık sabit bir tel boyunca kayan bir boncuk gibi belirli bir yörüngeye mecbursa, hareketin sınırlandırılmış olduğu söylenir.

→ Eğer fiziksel yönlendiriciler yoksa hareketin sınırlandırılmamış olduğu söylenir. Bir zincirin ucuna bağlı ve bir dairede dönen küçük bir taş zincir kırılana kadar sınırlandırılmış hareket yapmaktadır, bu andan sonra ise hareketi serbesttir.

→ Her durumda parcacığın hareketi sırasında izlediği yola yörünge denir.

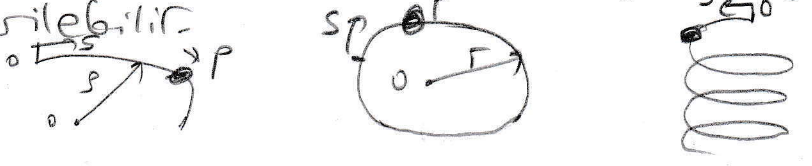
→ Bir parçacık doğrusal ya da eğrisel bir yörünge üzerinde hareket edebilir.

→ Doğrusal yörünge bir doğru şeklindedir ve bir boyutlu hareketi temsil eder. Cismin aldığı yol s olmak üzere doğrusal yörünge aşağıdaki gibi gösterilebilir.



→ Eğik yörünge de bir doğru şeklindedir ancak en az iki boyutlu hareketi temsil eder ve cismin aldığı yol s olmak üzere aşağıdaki gibi gösterilebilir.

→ Eğrisel yörünge herhangi bir eğri şeklindedir ve en az iki boyutlu hareketi temsil eder. Cismin aldığı yol s olmak üzere bu bölümde incelenecek eğrisel yörüngeler aşağıdaki gibi gösterilebilir.



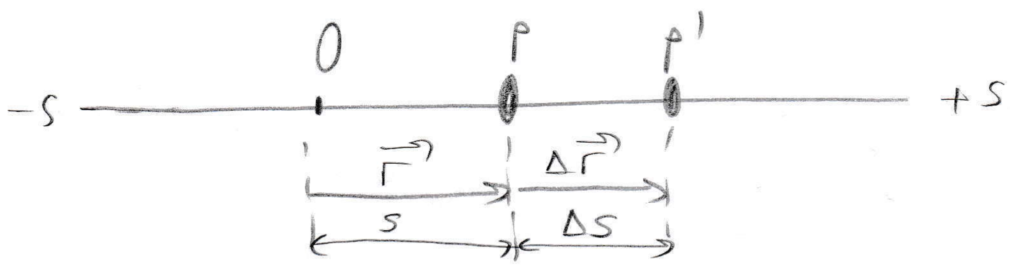
→ Bir P parçacığının herhangi bir t anındaki konumu, (x, y, z) kartezyen koordinatları, (r, θ, z) silindirik koordinatları veya (R, θ, ϕ) küresel koordinatları belirtilerek tanımlanabilir.

→ P parçacığının hareketi ayrıca, eğriye teğet (t) ve normal (n) doğrultuları ile doğal koordinatlarda tanımlanabilir.

→ Parçacıkların (veya rijit cisimlerin) hareketi, sabit referans eksenlerden (mutlak hareket analizi) ölçülen koordinatları kullanılarak veya hareketli referans eksenlerden (izafi hareket analizi) ölçülen koordinatları kullanılarak tanımlanabilir. Her iki tanımlama da geliştirilecek veya izleyen konularda uygulanacaktır.

2.1. Doğrusal Hareket

→ Doğrusal hareket yapan P parçacığı şekilde verildiği gibi düz bir hat boyunca hareket eder.



→ Herhangi bir t anında P'nin konumu, hat üzerindeki uygun sabit bir O referans noktasından ölçülen s mesafesiyle belirlenebilir. $t+\Delta t$ anında parçacık P' noktasına hareket etmekte ve koordinatları $s+\Delta s$ olmaktadır. Δt zamanı boyunca konum koordinatındaki değişim, parçacığın Δs yer değiştirmesi olarak adlandırılır. Parçacık negatif s yönünde hareket ediyorsa yer değiştirme negatif olacaktır.

→ Parçacığın aldığı toplam yol (s_T), hareketi süresince izlediği yörüngenin toplam uzunluğudur.

→ Parçacık hareketi süresince hiç yön değiştirmemişse parçacığın konumu, parçacığın aldığı toplam yolu verir.

→ Hız, birim zamandaki yer değiştirme miktarıdır. Birimi m/sn'dir.

yer değiştirmeye bağlı ortalama hız: $v_{ort} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

alınan toplam yola bağlı ortalama hız: $v_{ort} = \frac{s_T}{\Delta t}$

anlık hız: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$

→ Parçacık hareketi süresince hiç yön değiştirmemişse, her iki ortalama hız da birbirine eşit olur. Ancak parçacık hareketi süresince yön değiştirmişse her iki ortalama hız farklı değerler alır.

→ Parçacığın hareketi süresince $v=0$ olduğu anlarda parçacığın yön değiştirdiği anlaşılır.

→ Parçacık negatif s yönünde hareket ediyorsa hız negatif, pozitif s yönünde hareket ediyorsa hız pozitif olacaktır. Dolayısıyla hızın işareti hareketin yönü ile ilgili fikir verir.

→ İvme, birim zamanda hızdaki değişme miktarıdır. Dolayısıyla ivme hızlanma ya da yavaşlama anlamına gelir. Birimi m/sn^2'dir.

ortalama ivme: $a_{ort} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

anlık ivme: $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \rightarrow a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$

→ İvme, hızın artmasına veya azalmasına bağlı olarak pozitif veya negatiftir. Burada parçacığın azalmakta olan negatif hıza sahip olması halinde ivmenin pozitif olacağına dikkat edilmelidir. Parçacık yavaşlıyorsa negatif ivmeleniyor demektir.

→ Anlık hız ve anlık ivme tanımlarında dt zamanı elimine edilerek, yer değiştirme, hız ve ivme ile ilgili diferansiyel bir denklem elde edilir.

$$\left.\begin{array}{l} v = \frac{ds}{dt} \rightarrow dt = \frac{ds}{v} \\ a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dt = \frac{dv}{a} \end{array}\right\} \begin{array}{l} v\,dv = a\,ds \rightarrow a = a(s) \\ a = v\frac{dv}{ds} \rightarrow v = v(s) \end{array}$$

→ İvme; zamanın $(a=a(t))$, konumun $(a=a(s))$ veya hızın $(a=a(v))$ bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Bu durumda böyle bir hareket değişken ivmeli hareket olarak tanımlanır. Hareketin en genel halidir. Düzgün değişen doğrusal hareket olarak da tanımlanır. Bu tip bir hareket için aşağıdaki kinematik bağıntılar kullanılır.

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad \text{veya} \quad a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

$$a = a(s) \text{ ise } \quad v\,dv = a\,ds \quad \text{veya} \quad v = v(s) \text{ ise } \quad a = v\frac{dv}{ds}$$

→ İvme, sabit bir sayıya eşit olduğunda $(a = a_c = sbt)$ böyle bir hareket sabit ivmeli hareket olarak tanımlanır. Hareketin özel bir halidir. Düzgün doğrusal hareket olarak da tanımlanır. Bu tip bir hareketin çözümü için kullanılacak olan kinematik bağıntılar değişken ivmeli hareket bağıntılarının integrasyonuyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$v = v_0 \mp a_c . t$$

$$s = s_0 + v_0 . t \mp \frac{1}{2} a_c . t^2$$

$$v^2 = v_0^2 \mp 2a_c . (s - s_0)$$

→ Burada parçacık hızlanıyorsa ivme (+) işaretli ve yavaşlıyorsa (-) işaretli olur.

→ Doğrusal harekette hız sabit olduğunda ivme sıfır olur. Dolayısıyla ivmenin sıfır olması, hızın değişmediğini ve sabit kaldığını gösterir. Sabit ivmeli hareketin özel bir hali gibi de düşünülebilir.

2.1.1- Doğrusal Yörüngede Sürekli Hareket ve Düzensiz Hareket

→ Doğrusal yörüngede hareket "sürekli hareket" ve "düzensiz hareket" şeklinde verilir.

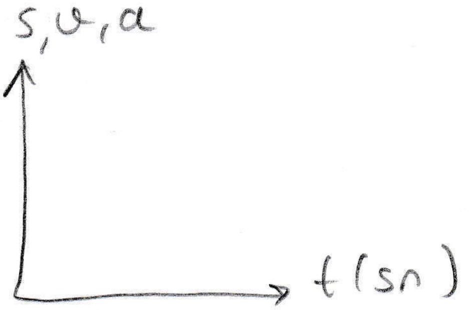
→ Sürekli hareket: Bir parçacığın belirli bir zaman veya belirli bir konum aralığındaki hareketi sürekli ise, konum, hız ya da ivme tek bir matematiksel fonksiyon ile tanımlanabilir.

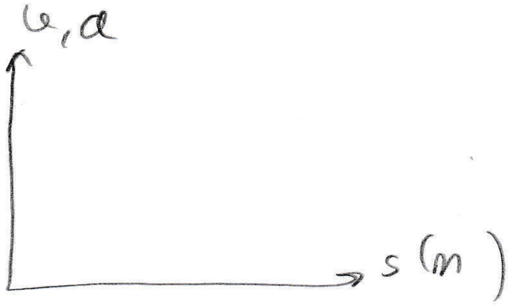
Örn: $s = t^3 - 9t^2 + 15t$

$v = 3t^2 - 18t + 15$

$a = 6t - 18$

→ Düzensiz hareket: Bir parçacığın belirli bir zaman veya belirli bir konum aralığındaki hareketi düzensiz ise, hareket en iyi şekilde bilgisayar çıktılarından deneysel olarak oluşturulabilecek bir dizi eğri ile grafiksel olarak tanımlanabilir.





s-t → v-t → a-t (türev)

a-t → v-t → s-t (int)

a-s → v-s (int)

v-s → a-s (türev)

→ s-t grafiginin egimi v-t grafigini, v-t grafiginin egimi a-t grafigini verir. a-t grafigi altında kalan alan v-t grafigini, v-t grafigi altında kalan alan s-t grafigini verir.

→ v-s grafiginin egimi a-s grafigini verir. a-s grafigi altında kalan alan v-s grafigini verir.

→ Düzensiz harekette her bir zaman veya konum aralıgı için tek tek hesaplama yapılır.

→ s-t, v-t ve v-s grafiklerinde süreklilik vardır. a-t ve a-s grafiklerinde süreklilik yoktur.

2.1.2. Doğrusal Yörüngede Serbest Düşüş Hareketi

→ Düşey doğrultuda gerçekleşen bir harekettir ve $\vec{F}$ kuvvetinin doğurduğu $\vec{a}$ ivmesi ile değil, yalnızca cismin $\vec{W}$ ağırlığından dolayı yerçekiminin doğurduğu $\vec{g}$ ivmesi ile gerçekleşir.

→ $\vec{g}$ ivmesi düşey doğrultuda, aşağı yönlü ve 9.81 m/s^2 sabit değerine sahip bir ivmedir.

→ Böylece bu tip bir hareket de yine sabit ivmeli hareket olarak tanımlanır ve bu tip bir hareketin çözümünde kullanılacak olan kinematik bağıntılar aşağıdaki gibidir.

$$v = v_0 \mp g \cdot t \qquad \downarrow \vec{g}$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t \mp \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 = v_0^2 \mp 2g(h - h_0)$$

→ Burada hareketin yönü (↑+) verilmişse g (−) işaretli ve hareketin yönü (↓+) verilmişse g (+) işaretli alınır. g'nin işareti hareketin yönüne göre değil pozitif yön tanımına göre belirlenir.

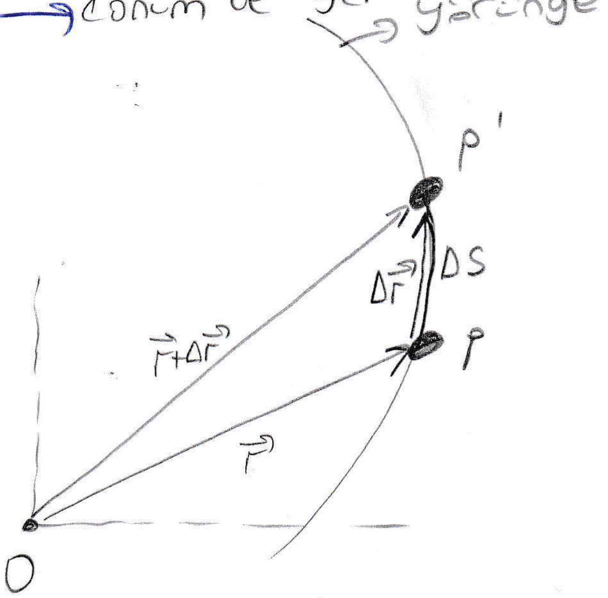
2.2. Düzlemde Eğrisel Hareket

→ Burada, parçacığın tek bir düzlemde yer alan eğrisel bir yörünge boyunca olan hareketi incelenmektedir.

→ Düzlemde eğrisel hareket vektör analizi ile tanımlanır. Bu konunun devamı, dinamikteki en temel kavramlardan birini, yani bir vektörün zaman türevini içermektedir. Dinamikteki pek çok analiz, vektörel büyüklüklerin zamana bağlı değişiminden faydalanmaktadır.

→ Düzlemsel bir eğri boyunca bir parçacığın sürekli hareketini göz önünde bulundurduğumuzda kinematik büyüklükler aşağıdaki gibi tanımlanır.

→ Konum ve yer değiştirme:



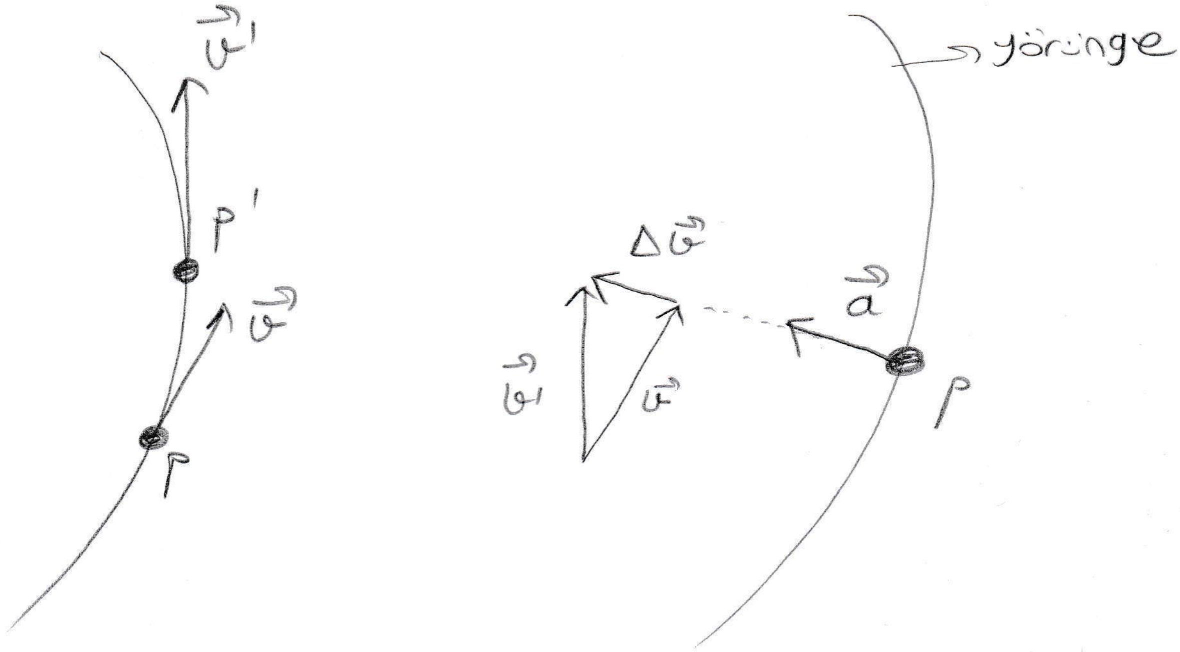
$\vec{OP} = \vec{r}$ ve $\vec{OP'} = \vec{r} + \Delta\vec{r}$: konum vektörü (m)

$\Delta\vec{r}$: yer değiştirme vektörü (m)

Δs : skaler yer değiştirme mesafesi (m)

→ Genel olarak parçacık eğrisel bir yörüngede hareket ettikçe konum vektörünün doğrultusu, büyüklüğü ve yönü değişir.

→ Hız :



ortalama hız: $\vec{v}_{ort} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ (m/sn)

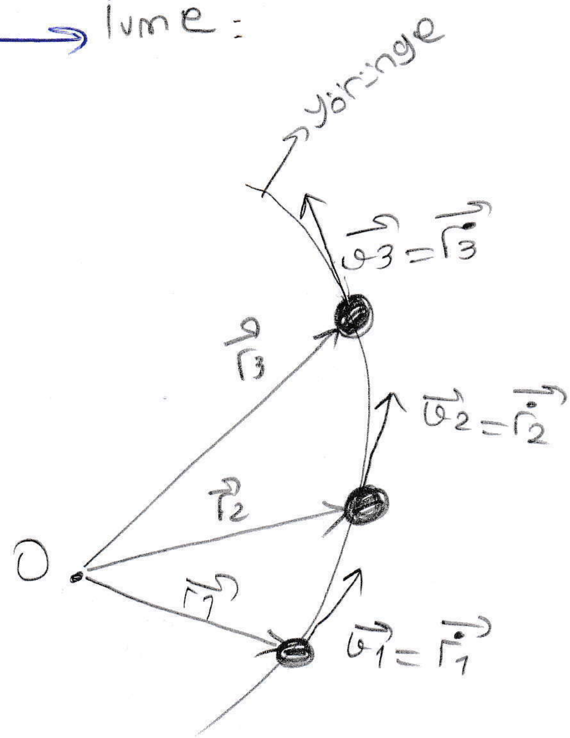
ortalama sürat: $v_{ort} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ (m/sn)

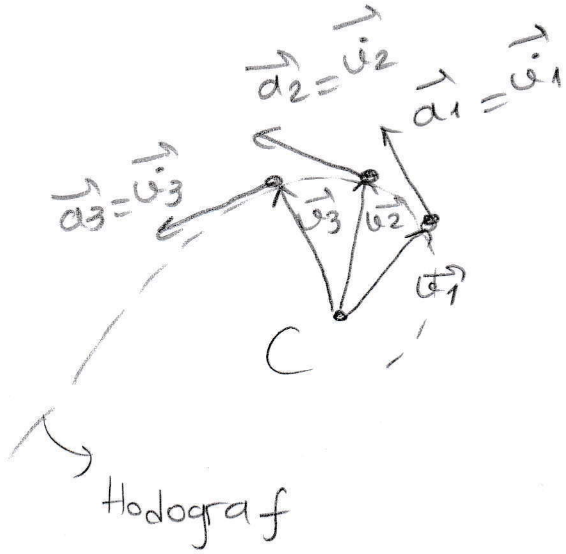
anlık hız: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \rightarrow \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

sürat: $v = |\vec{v}| = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$

→ Hız vektörü yörüngeye teğet bir vektördür.

→ İvme:





ortalama ivme: $\vec{a}_{ort} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (m/sn^2)

anlık ivme: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \rightarrow \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$

→ ivme vektörü hodografa teget bir vektördür.

→ Görüldüğü gibi hız, konum vektörü ile ve ivme, hız vektörü ile ilgilidir.

→ Düzlemde eğrisel hareket üç farklı koordinat sisteminde incelenecektir. Bunlar; kartezyen koordinatlar (x, y), doğal koordinatlar (n, t) ve kutupsal koordinatlardır (r, θ).

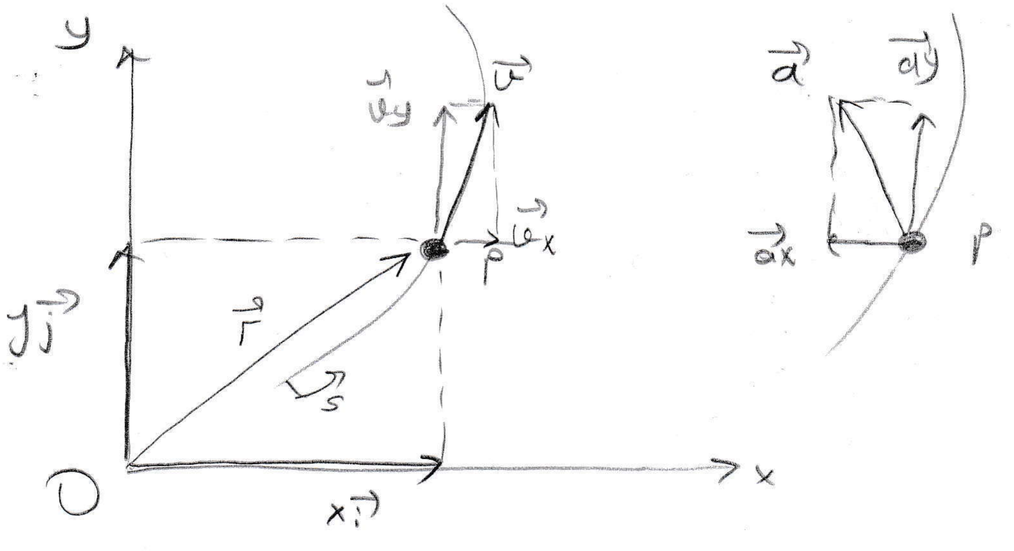
→ Herhangi bir düzlemde eğrisel hareketi tanımlamak için bu üç koord. sisteminden herhangi biri kullanılabilir. Ancak verilen bir problem için yörüngenin geometrisine uygun olan koord. sisteminin seçimi bu dersin konusunu oluşturmaktadır.

2.2.1. Kartezyen Koordinatlar (x-y)

→ Bu koordinat sistemi, özellikle ivmenin x- ve y- bileşenlerinin bağımsız olarak oluştuğu veya belirlendiği hareketin tanımlanması durumunda veya başka bir ifadeyle parçacığın izlediği yolu veya yolun uzunluğunu tam olarak bilmek gerekmediği durumlarda kullanışlıdır.

→ Kartezyen koordinatlar ile parçacığın hareketi sabit bir O noktasından izlenir.

→ Kartezyen koordinat sistemi sabit bir O noktasına yerleştirilir.



→ Kartezyen koordinatlarda kinematik büyüklükler yörünge denklemi $y=f(x)$ ve $x=f(t)$ ve $y=f(t)$ olmak üzere aşağıdaki gibidir.

→ Konum:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta_r = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

→ Hız:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \rightarrow \begin{array}{l} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{array}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\theta_v = tg^{-1}\frac{v_y}{v_x}$$

→ İvme:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}$$

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} \longrightarrow \begin{aligned} a_x &= \ddot{x} \\ a_y &= \ddot{y} \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\theta_a = tg^{-1}\frac{a_y}{a_x}$$

→ Burada zamana göre türev alırken, şiddetleri ve yönleri sabit kaldığı için birim vektörlerin zamana göre türevleri sıfır olmuştur.

2.2.1.1. Serbest Uçuş Hareketi / Atış Hareketi

→ Serbest uçuş hareketi/atış hareketi iki boyutlu kinematik teorinin önemli bir uygulamasıdır.

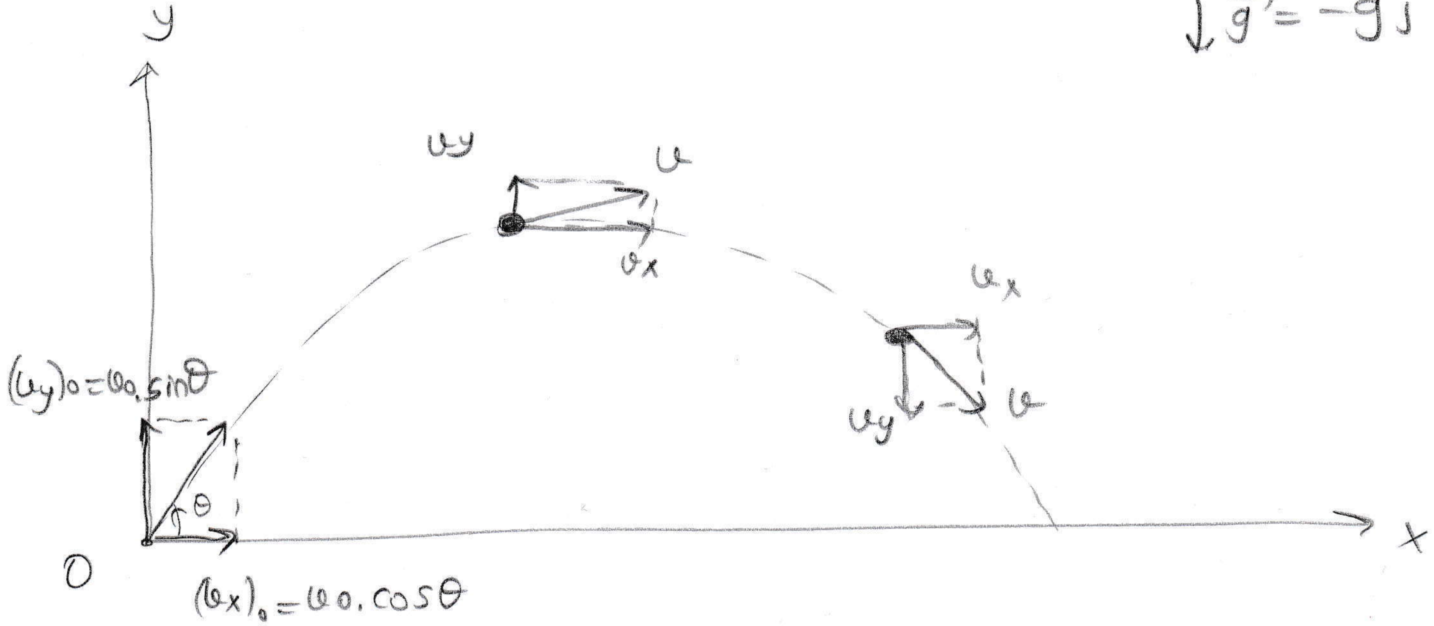
→ Serbest uçuş hareketi cismin sadece kendi ağırlığından dolayı etki eden yerçekimi ivmesiyle gerçekleşen bir harekettir.

→ Bir merminin hareketi ve bir futbol topunun hareketi eğrisel yörüngede gerçekleşen serbest uçuş hareketine örnek olarak gösterilebilir.

→ Burada aerodinamik direnç ve dünyanın eğriselliği ile dönüşü ihmal edilmekte ve yerçekiminden kaynaklanan ivmeyi sabit olarak dikkate alacak şekilde yükseklik değişimlerinin yeterince küçük olduğu kabul edilmektedir. Bu kabullerle, kartezyen koordinatlar yörünge analizi için kullanılmalıdır.

→ Hareketin yörüngesi temsili olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

$\downarrow \vec{g} = -g\vec{j}$



→ Serbest uçuş hareketinde aerodinamik direnç (hava direnci) ihmal edildiğinden mermiye etki eden tek kuvvet, merminin ağırlığıdır. Bu da merminin düşey doğrultuda ve aşağı yönlü sabit bir yerçekimi ivmesi kazanmasına neden olur. Buna göre, merminin ivmesi aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \quad \rightarrow \quad a_x = 0$

$a_y = -g \quad (g = 9.81 \, m/sn^2)$

→ Kinematik analiz için, eğrisel yörüngede serbest uçuş hareketi, yatayda ivmesiz ve düşeyde sabit yerçekimi ivmesinin etkisinde gerçekleşen, birbirine dik iki doğrusal hareketin bileşkesi olarak düşünülür.

→ Buna göre sabit ivmeli doğrusal hareket bağıntıları serbest uçuş hareketine uyarlanarak, serbest uçuş hareketinin kinematik bağıntıları elde edilir.

Sbt. ivmeli doğrusal hareket	Yatay hareket ($a_x=0$)	Düşey hareket ($a_y=-g$)
$v=v_0+a.t$	$v_x=v_{0x}$	$v_y=v_{0y}-g.t$
$s=s_0+v_0.t+\frac{1}{2}at^2$	$x=x_0+v_{0x}.t$	$y=y_0+v_{0y}.t-\frac{1}{2}gt^2$
$v^2=v_0^2+2a(s-s_0)$	$v_x=v_{0x}$	$v_y^2=v_{0y}^2-2g(y-y_0)$

→ Yatay hareket için elde edilen sonuçlar, hareket süresince hızın yatay bileşeninin daima sabit kaldığını gösterir.

→ Yatay hareket bağıntıları $(a_x = 0)$

$$v_x = v_{0x}$$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$$

→ Düşey hareket bağıntıları $(a_y = -g)$ $\uparrow +$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

→ Serbest düşüş hareketi büyük hızlar ve yüksek irtifalar içerdiğinde, doğru sonuçları elde etmek için, hareketin şeklini, irtifa ile g'nin ve hava yoğunluğunun değişimini ve dünyanın dönüşünü hesaba katmak gerekir. Bu faktörler hareket denklemlerini önemli ölçüde zorlaştırmaktadır ve genellikle ivme denklemlerinin sayısal integrasyonunu gerektirmektedir.

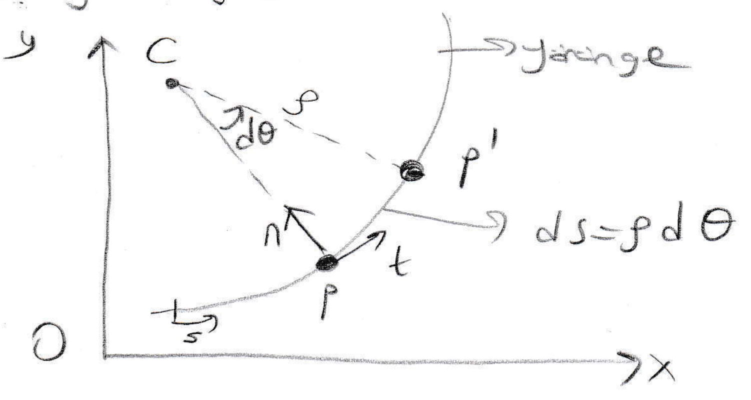
2.2.2. Normal ve Teğetsel Koordinatlar (n-t)

→ Parçacığın izlediği yolun eğrilik merkezi biliniyorsa veya hesaplanabiliyorsa hareketi normal ve teğetsel koordinatlarda incelemek uygundur.

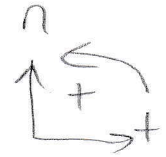
→ Normal ve teğetsel koordinatlar parçacığın üzerine yerleştirilir. Yörünge boyunca normal ve teğetsel koordinatların parçacık ile beraber hareket ettiği göz önünde bulundurulur. Herhangi bir konumda n'nin pozitif yönü daima yörüngenin eğrilik merkezine doğru alınır ve t'nin pozitif yönü n'ye dik ve hareket yönündedir.

→ Eğrilik yön değiştiriyorsa, pozitif n-yönü eğrinin bir tarafından diğer tarafına yer değiştirecektir.

→ Düzlemde sabit bir eğri boyunca hareket eden P parçacığını göz önüne alalım.



n-t düzlemi (oskülatör düzlem)



→ $\rho = sbt$ olan ve tek bir eğrilik merkezine sahip yörüngeler bu bölümün konusunu oluşturmaktadır.

→ Özel olarak yol $y = f(x)$ yörünge denklemi ile ifade ediliyorsa, yol üzerindeki herhangi bir noktada eğrilik yarıçapı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$y = f(x) \rightarrow \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

→ Hız: Hız vektörü yörüngeye teğet bir vektördür. Bu nedenle doğal koordinat sisteminde sadece teğetsel bileşeni vardır.

$$\vec{v} = v \, \vec{u_t}$$

$$\vec{v} = \dot{s} \, \vec{u_t}$$

$$\vec{v} = \rho \, \dot{\theta} \, \vec{u_t}$$

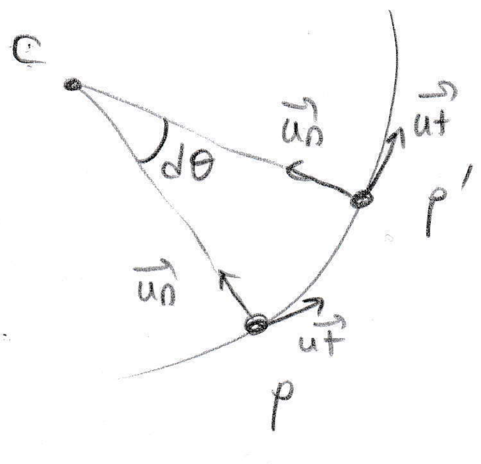
→ İvme:

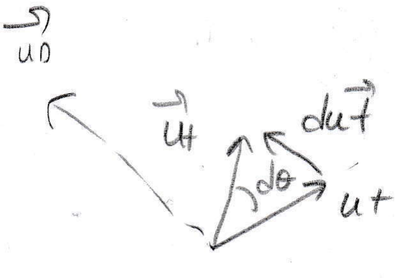
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{u_t} + v\,\dot{\vec{u_t}}$$

→ Burada $\vec{u_t}$ türevi sıfır olamaz. Çünkü koordinat sistemi paracık üzerine yerleştirilmiştir ve böylece paracık hareket ettikçe $\vec{u_t}$ birim vektörü büyüklüğünü korur ancak doğrultusunu değiştirir.

→ O halde $\vec{u_t}$ aşağıdaki gibi hesaplanır.





skaler

$ds = \rho\, d\theta$

$du_t = u_t\, d\theta \qquad (u_t = 1)$

$du_t = d\theta$

$\frac{du_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$

$\dot{u}_t = \dot{\theta}$

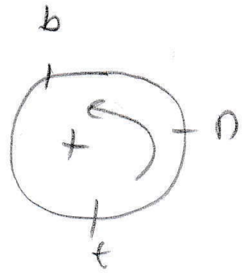
vektörel

$d\vec{u_t} = du_t\,\vec{u_n}$

$\dot{\vec{u_t}} = \dot{\theta}\,\vec{u_n}$ (ρ = sbt old. için u_n'nin türevi yok)

→ Sonuç: Bir birim vektörün zamana göre türevi, birim vektörün doğrultusunu veren birim vektör (ona dik olan) ile açısal hızın çarpımına eşittir.

$\dot{\vec{u_t}} = \dot{\vec{\theta}} \times \vec{u_n}$



$\dot{\vec{u_t}} = \dot{\theta}\,\vec{u_n}$

→ Böylece ivme aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{u_t} + v\,\dot{\vec{u_t}}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{u_t} + v\dot{\theta}\,\vec{u_n} \quad \left(s = \rho\theta \rightarrow \theta = \frac{s}{\rho} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{\rho} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{\rho} \right)$$

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{u_t} + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{u_n}$$

$$\vec{a} = a_t\,\vec{u_t} + a_n\,\vec{u_n} \longrightarrow a_t = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

→ İvmenin teğetsel bileşeni, hızın büyüklüğünün zamana göre değişim oranının bir sonucudur. Buna göre, doğrusal hareket denklemleri kullanılarak, eğrisel harekette ivmenin teğetsel bileşeni hesaplanabilir.

→ a_t, değişken ise teğetsel bileşen için aşağıdaki bağıntılar yazılır.

$$a_t = \dot{v} \qquad \left(v = \frac{ds}{dt} \right)$$

$$a_t\, ds = v\, dv \quad \text{veya} \quad a_t = v \frac{dv}{ds}$$

→ a_t, sabit ise teğetsel bileşen için aşağıdaki bağıntılar yazılır.

$$v = v_0 \mp a_t . t$$

$$s = s_0 + v_0 . t \mp \frac{1}{2} a_t . t^2$$

$$v^2 = v_0^2 \mp 2a_t . (s - s_0)$$

→ Normal ve teğetsel koordinatlarda incelediğimiz eğrisel hareket için tanımlanan iki özel hareket halini ele alalım.

→ 1. Parçacık bir doğru boyunca hareket ediyorsa,

$$\rho \to \infty \quad \to \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \to a_n = 0$$

ve

$$a = a_t = \dot{v}$$

olur. Buradan ivmenin teğetsel bileşeninin, hızın büyüklüğünün zamana göre değişim oranını ifade ettiği sonucu çıkar.

→ 2. Parçacık bir eğri boyunca sabit hızla hareket ediyorsa,

$$v = sbt \quad \to \quad a_t = \dot{v} = 0$$

ve

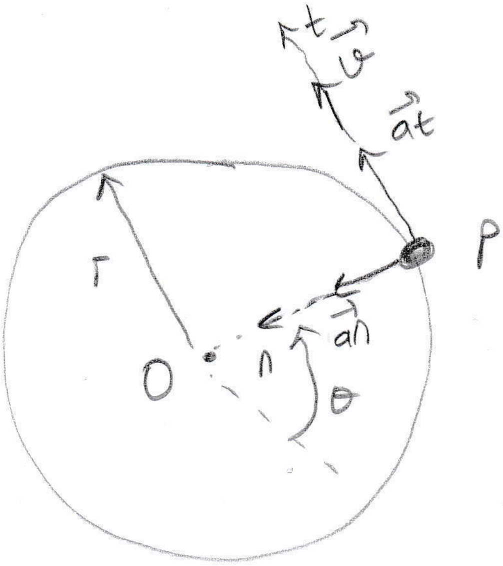
$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

olur. Buradan ivmenin normal bileşeninin, hızın doğrultusunun zamana göre değişim oranını ifade ettiği sonucu çıkar. Bu bileşen, daima eğrilik merkezine doğru etkidiğinden, bazen "merkezcil ivme" olarak adlandırılır.

($a_t \to$ hızın büyüklüğündeki değişim, $a_n \to$ hızın doğrultusundaki değişim)

2.2.2.1. Dairesel Hareket

→ Dairesel hareket, ρ eğrilik yarıçapının çemberin sabit r yarıçapı olduğu düzlemde eğrisel hareketin önemli özel bir durumudur.



→ P parçacığının dairesel hareketi için hız ve ivme bileşenleri aşağıdaki hale gelmektedir.

$$v = \dot{s} = \rho\dot{\theta} = r\dot{\theta} \longrightarrow v = r\dot{\theta}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\dot{\theta}^2}{r} = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta} \longrightarrow a_n = r\dot{\theta}^2 \text{ veya } a_n = v\dot{\theta}$$

$$a_t = \dot{v} = \underbrace{\cancel{\dot{r}}}_{0}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = r\ddot{\theta} \longrightarrow a_t = r\ddot{\theta}$$

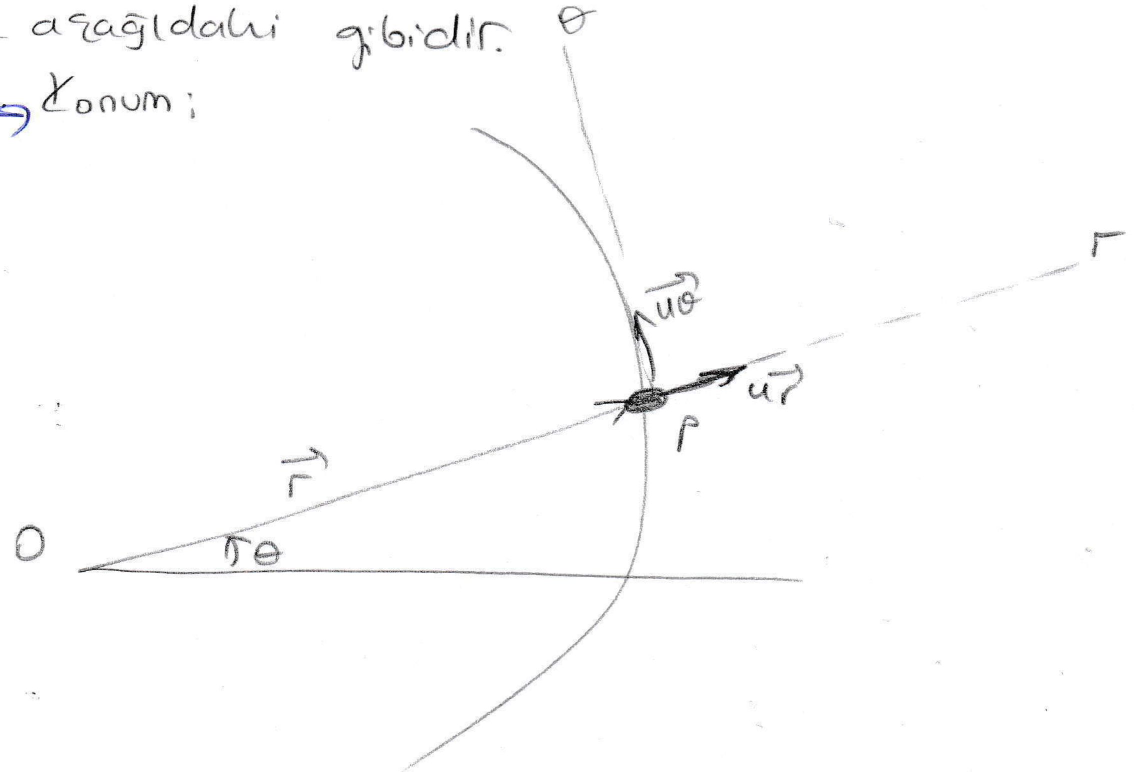
2.2.3. Kutupsal Koordinatlar ($r-\theta$)

→ Bir paracık sabit bir O noktasına göre ötelenen ve dönen bir yörüngede hareket ediyorsa, böyle bir hareketi kutupsal koordinatlarda incelemek uygundur.

→ Kutupsal koordinat sistemi paracığın üzerine yerleştirilir, ancak hareket sabit bir O noktasından gözlemlenir. Bu O noktasının yörüngenin eğrilik merkezi olması gerekmez.

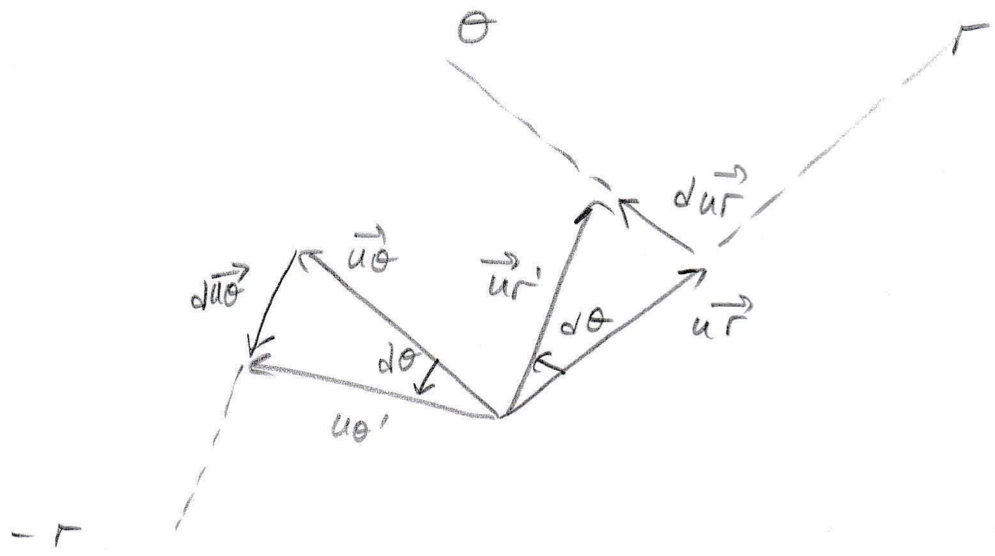
→ Kutupsal koordinatlarda kinematik büyüklükler yörünge denklemi $r=f(\theta)$ ve $r=f(t)$ ve $\theta=f(t)$ olmak üzere aşağıdaki gibidir.

→ Konum;



$\vec{r} = r\vec{u_r}$ (m)

→ Birim vektörlerin zaman türevleri aşağıdaki gibidir.



$$\dot{\vec{u_r}} = \dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

$$\dot{\vec{u_\theta}} = -\dot{\theta}\,\vec{u_r}$$

→ Hız:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad (m/sn)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\,\dot{\vec{u_r}}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

$$\vec{v} = v_r\,\vec{u_r} + v_\theta\,\vec{u_\theta} \rightarrow \begin{array}{l} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{array}$$

$$v = \sqrt{(v_r)^2 + (v_\theta)^2}$$

Burada $r\,(m)$ radyal doğrultu, $\dot{r}\,(m/sn)$ radyal mesafenin artma veya azalma oranı, $\theta\,(rad)$ açısal doğrultu, $\dot{\theta}\,(rad/sn)$ açısal hız olarak tanımlıdır.

→ İvme:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} \qquad (m/sn^2)$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\,\dot{\vec{u_r}} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\vec{u_\theta}}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}\dot{\theta}\,\vec{u_r}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{u_\theta}$$

$$\vec{a} = a_r\,\vec{u_r} + a_\theta\,\vec{u_\theta} \rightarrow \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$a = \sqrt{(a_r)^2 + (a_\theta)^2}$$

Burada $\ddot{r}\,(m/sn^2)$ radyal ivme ve $\ddot{\theta}\,(rad/sn^2)$ açısal ivme olarak tanımlıdır. İvmenin θ-bileşeni alternatif olarak,

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$$

şeklinde de yazılabilir.

2.2.3.1. Dairesel Hareket

→ r'nin sabit olduğu dairesel bir yörüngedeki hareket için kinematik bileşenler aşağıdaki hale gelir.

$$v_r = \dot{r} = 0 \longrightarrow v_r = 0$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \longrightarrow v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2 \longrightarrow a_r = -r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\ddot{\theta} \longrightarrow a_\theta = r\ddot{\theta}$$

→ Bu özel dairesel hareket durumunda (n,t) ve (r,θ) koordinatları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$a_r = -a_n$$

$$a_\theta = a_t$$

→ Bu özel dairesel hareket durumunda O noktası aynı zamanda eğrilik merkezidir.

→ Kutupsal koordinatlardan kartezyen koordinatlara dönüşüm,

$x = r.\cos\theta$

$y = r.\sin\theta$

koordinat bağıntıları ile verilir. Kartezyen koordinatlarda ivme aşağıdaki gibi elde edilir.

$a_x = \ddot{x}$

$a_y = \ddot{y}$

→ Kutupsal koordinatlarda verilen problemler türev açısından değerlendirildiğinde genel olarak iki tip problem ortaya çıkar.

→ 1. Koordinatlar zaman parametreli $r = r(t)$ ve $\theta = \theta(t)$ verilebilir.

$r = 4t^2 \rightarrow \dot{r} = 8t \rightarrow \ddot{r} = 8$

$\theta = 8t^3 + 6 \rightarrow \dot{\theta} = 24t^2 \rightarrow \ddot{\theta} = 48t$

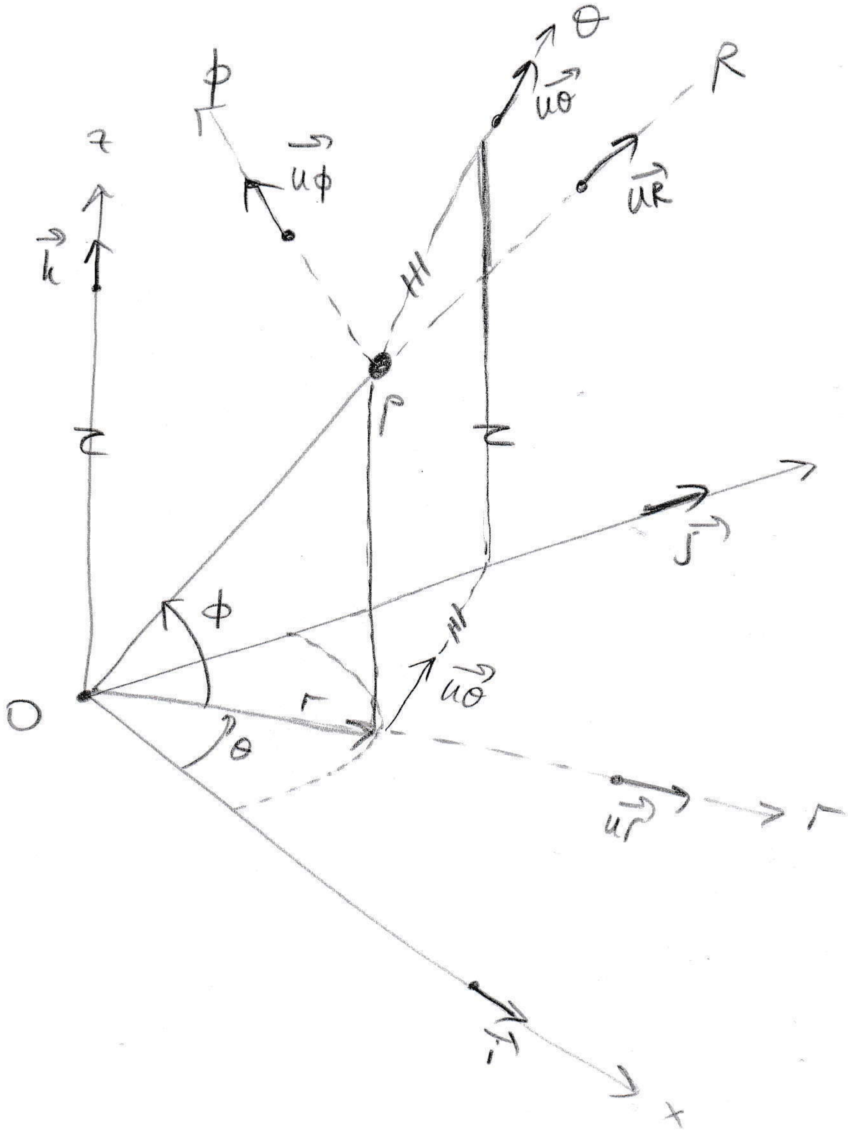
→ 2. Koordinatlar yörünge denklemi $r = f(\theta)$ ile verilebilir.

$r = 5\theta^2 \rightarrow \dot{r} = 10\theta\dot{\theta} \rightarrow \ddot{r} = 10\left(\dot{\theta}\dot{\theta} + \theta\ddot{\theta}\right)$

$r^2 = 6\theta^3 \rightarrow 2r\dot{r} = 18\theta^2\dot{\theta} \rightarrow 2\left(\dot{r}\dot{r} + r\ddot{r}\right) = 18\left(2\theta\dot{\theta}\dot{\theta} + \theta^2\ddot{\theta}\right)$

2.3. Uzayda Eğrisel Hareket

→ Bir paraacığın bir uzay eğrisi boyunca üç boyutlu hareketini tanımlamak için çoğunlukla kartezyen (x,y,z) silindirik (r,θ,z) ve küresel (R,θ,ϕ) koordinatlar olmak üzere üç koordinat sistemi kullanılmaktadır.



2.3.1. Kartezyen Koordinatlar (x, y, z)

→ Bir uzay eğrisi boyunca hareket eden P parçacığının hareketi kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibi verilir.

→ Konum;

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{u_R} = \frac{\vec{R}}{R}$$

→ Hız;

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \longrightarrow \begin{array}{l} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{array}$$

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_y)^2}$$

$$\vec{u_v} = \frac{\vec{v}}{v}$$

→ ivme:

$$\vec{a} = \vec{\dot{v}}$$

$$\vec{a} = \vec{\ddot{R}}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k} \longrightarrow a_x = \ddot{x}$$

$$a_y = \ddot{y}$$

$$a_z = \ddot{z}$$

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$$

$$\vec{u_a} = \frac{\vec{a}}{a}$$

2.3.2. Silindirik Koordinatlar (r, θ, z)

→ Bir uzay eğrisi boyunca hareket eden P parçacığının hareketi silindirik koordinatlarda aşağıdaki gibi verilir.

→ Konum;

$$\vec{R} = r\vec{u_r} + z\vec{k}$$

→ Hız;

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_r\vec{u_r} + v_\theta\vec{u_\theta} + v_z\vec{u_z} \rightarrow v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$v_z = \dot{z}$$

$$v = \sqrt{(v_r)^2 + (v_\theta)^2 + (v_z)^2}$$

→ İvme;

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u_\theta} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_r\vec{u_r} + a_\theta\vec{u_\theta} + a_z\vec{u_z} \rightarrow a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

$$a_z = \ddot{z}$$

$$a = \sqrt{(a_r)^2 + (a_\theta)^2 + (a_z)^2}$$

→ Silindir koordinatlarda, doğrultularındaki değişim nedeni ile $\vec{u_r}$ ve $\vec{u_\theta}$ birim vektörlerinin zaman türevlerinin sıfır olmamasına karşın, z - doğrultusundaki $\vec{k}$ birim vektörünün doğrultusu sabit kalmakta ve bu nedenle zaman türevi sıfır olmaktadır.

$$\dot{\vec{u_r}} = \dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

$$\dot{\vec{u_\theta}} = -\dot{\theta}\,\vec{u_r}$$

$$\dot{\vec{u_z}} = 0$$

2.3.3. Küresel Koordinatlar (R, θ, ϕ)

→ Örneğin radar ölçümlerinde olduğu gibi, bir parçacığın konumunu belirlemek için radyal bir mesafe ve iki açıdan yararlanıldığında küresel koordinatlar (R, θ, ϕ) kullanışlı olmaktadır.

→ Hız:

$$\vec{v} = v_R \vec{u_R} + v_\theta \vec{u_\theta} + v_\phi \vec{u_\phi}$$

$$v_R = \dot{R}$$

$$v_\theta = R\dot{\theta}\cos\phi$$

$$v_\phi = R\dot{\phi}$$

→ İvme:

$$\vec{a} = a_R \vec{u_R} + a_\theta \vec{u_\theta} + a_\phi \vec{u_\phi}$$

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\cos^2\phi$$

$$a_\theta = \frac{\cos\phi}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\theta}\right) - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi$$

$$a_\phi = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\right) + R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi$$

→ Hız ve ivme için, üç koordinat sistemindeki bağıntıların herhangi ikisi arasında doğrusal cebirsel dönüşümler geliştirilebilir. Bu dönüşümler, örneğin küresel koordinatlardaki bileşenler biliniyorsa, kartezyen koordinatlardaki hareket bileşenlerini veya tam tersini ifade etmeyi mümkün kılmaktadır. Bu dönüşümler matris işlemleri veya basit bir bilgisayar programı ile kolaylıkla elde edilir.

2.4. Ötelenen Eksenler ile Bağıl Hareket (İzafi Hareket)

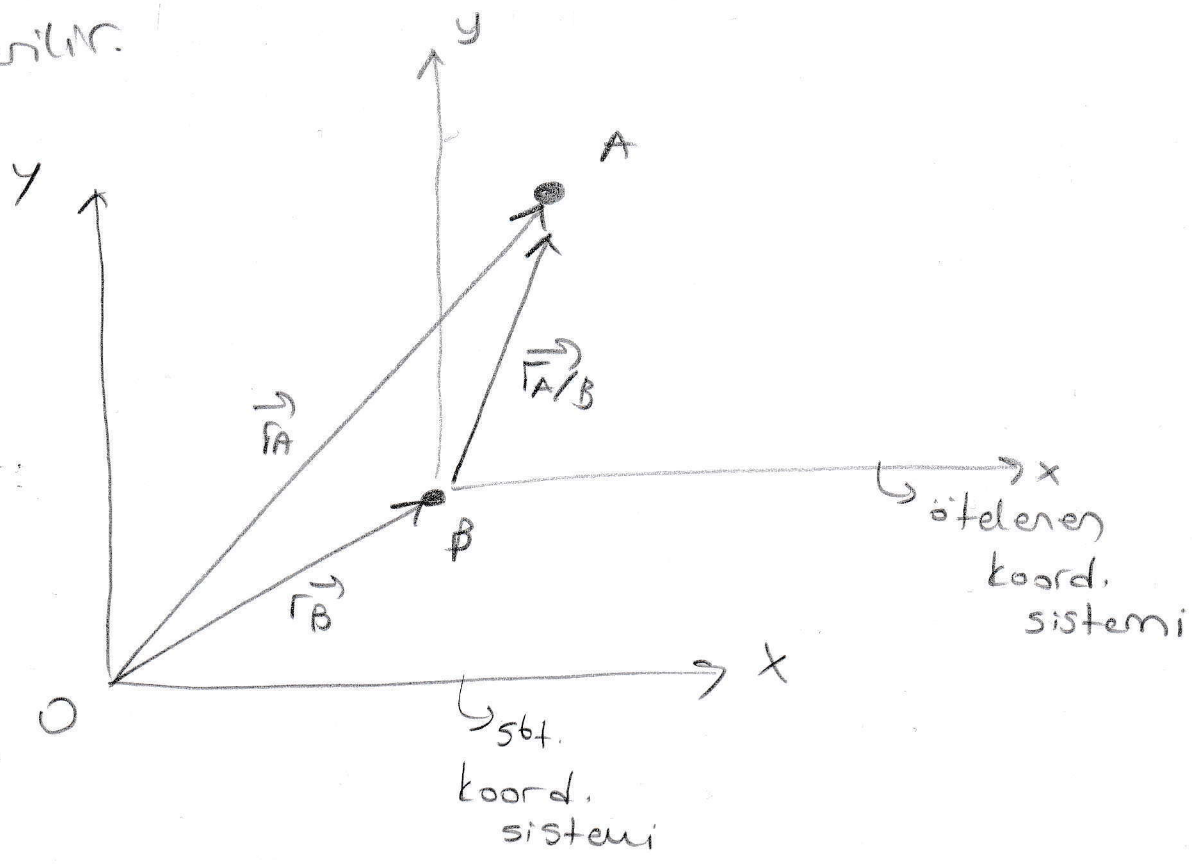
→ Bir parçacığın mutlak hareketi, ölçüm için tek bir sabit referans sistemi kullanılarak (önceki konularda olduğu gibi) belirlenmektedir. Ancak birçok durumda, parçacığın hareketinin yörüngesi çok karmaşıktır ve iki veya daha fazla referans sistemi kullanarak, hareketi kısımlara ayırıp analiz etmek daha uygun olabilir.

→ Örneğin bir uçağın pervanesinin ucuna yerleşmiş bir parçacığın hareketi; uçak uçmakta iken, önce sabit bir referans sisteminden uçağın hareketi gözlenir ve sonra parçacığın uçağa bağlı bir referans noktasından ölçülen dairesel hareketi vektörel olarak süperpoze edilirse, daha kolay tanımlanır. Bu iki farklı hareketi tanımlamak için kartezyen, normal ve teğetsel veya kutupsal koordinatlardan uygun olanlar seçilir.

→ Farklı koordinat sistemlerinde tanımlı iki hareket karşılaştırılacaksa, koordinatlar birbiri cinsinden yazılmalıdır.

→ Analiz için dünyanın hareketi ihmal edilecek ve ötelenen referans sistemleri ele alınacaktır ve bağıl analiz vektörel işlemlerden oluşmaktadır.

→ Bağıl hareket grafiksel olarak aşağıdaki gibi gösterilir.



→ Bağıl hareketin kinematik bağıntıları aşağıdaki gibidir.

→ A'nın B'ye göre bağıl konumu,

$$\vec{r}_{A/B} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

olmak üzere A'nın mutlak konumu aşağıdaki gibidir.

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}$$

Böylece bağıl konum mutlak konum cinsinden aşağıdaki gibi olur.

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

→ Hız ve ivme aşağıdaki gibidir.

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

2.5. Birbirine Bağlı Paracıkların Sınırlandırılmış Hareketi

→ Bağlı durumlarda, paracıkların hareketleri birbirine bağlı elemanların fiziksel kısıtlarından ötürü ilişkilidir. Böyle durumlarda paracıkların kendi hareketlerini belirlemek için bu kısıtları hesaba katmak gereklidir. Bu tip problemler genellikle paracıkların makaralardan dolandırılmış uzamayan iplerle bağlı olduğu sistemlerde ortaya çıkar.

→ Bu tip problemlerin çözümünde aşağıdaki yol izlenir.

1. Sistemde ip sayısı belirlenir. İp sayısı kadar hareket denklemi kurulacaktır ve sistem hareket denklemi sayısı kadar serbestlik derecesine sahiptir.

2. Hareketi incelenecek olan paracıklar ve hareket doğrultuları belirlenir. Bu doğrultular birbirine dik olmak zorunda değildir.

3. Her bir doğrultu için bir referans eksen belirlenir.

4_ Referans eksen başlangıcı noktası olmak üzere her bir parçacığın konumu ve böylece pozitif yön tanımlanır.

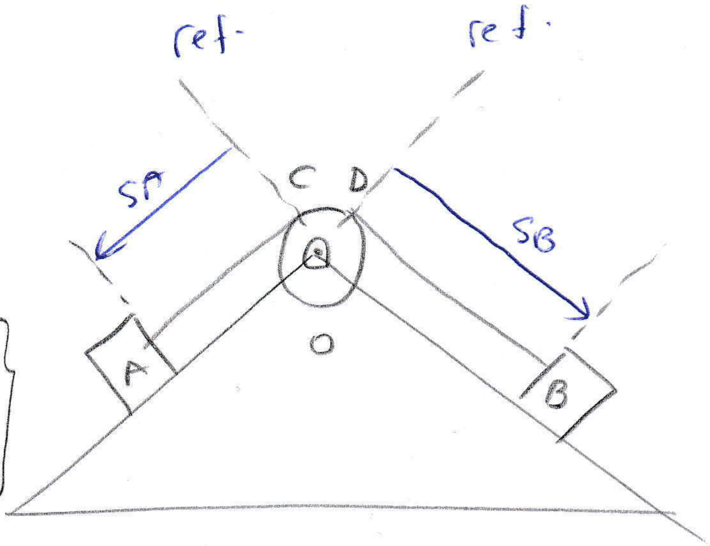
5_ Her bir ipin toplam uzunluğu (l_T) konum koordinatları cinsinden yazılır.

6_ İpin toplam uzunluğunun değişmediği kabul edilir ve bu bilgiden yararlanarak kinematik büyüklükler olan yer değiştirme (Δs), hız (v) ve ivme (a) elde edilir.

→ Bağlı sistemlerde yön tanımı referans alınarak elde edilen ivmenin işareti hızlanma ya da yavaşlama bilgisi vermez. İşaret, hızlanma ya da yavaşlamadan bağımsız, hareketin yönüyle ilgilidir.

→ Bağlı hareket analizi için aşağıdaki örnekler incelenebilir.

1.



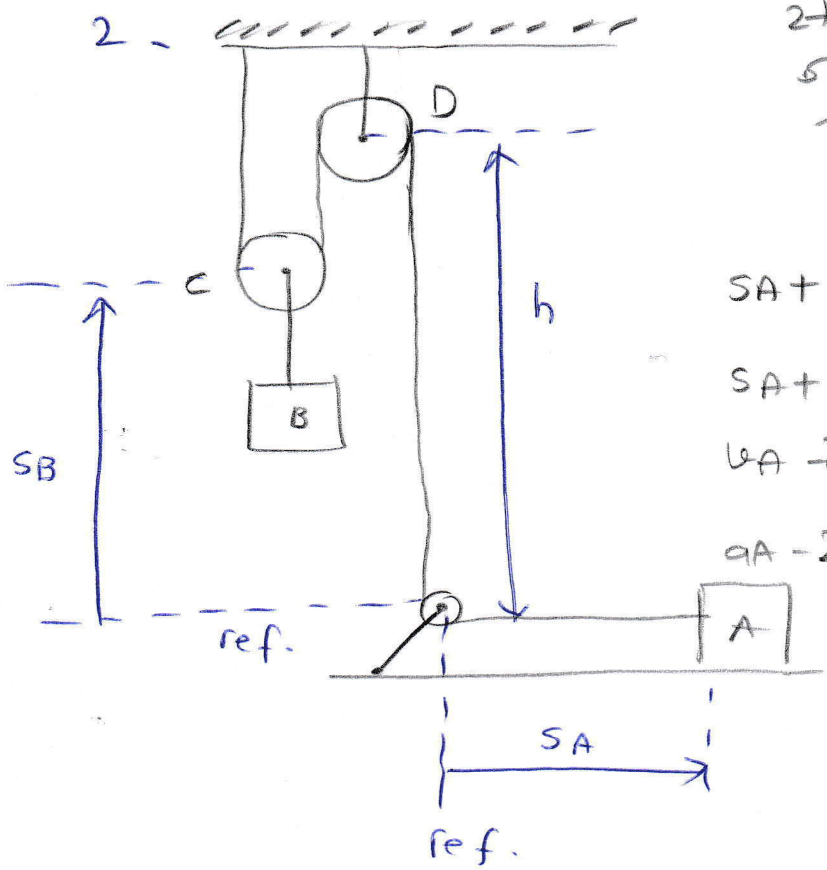
2 tane ref.
s_A, s_B
l_T

$$s_A + s_B + l_{CD} = l_T$$

$$v_A + v_B = 0 \rightarrow v_A = -v_B$$

$$a_A + a_B = 0 \rightarrow a_A = -a_B$$

2.



2 tane ref.
s_B, s_A
l_T

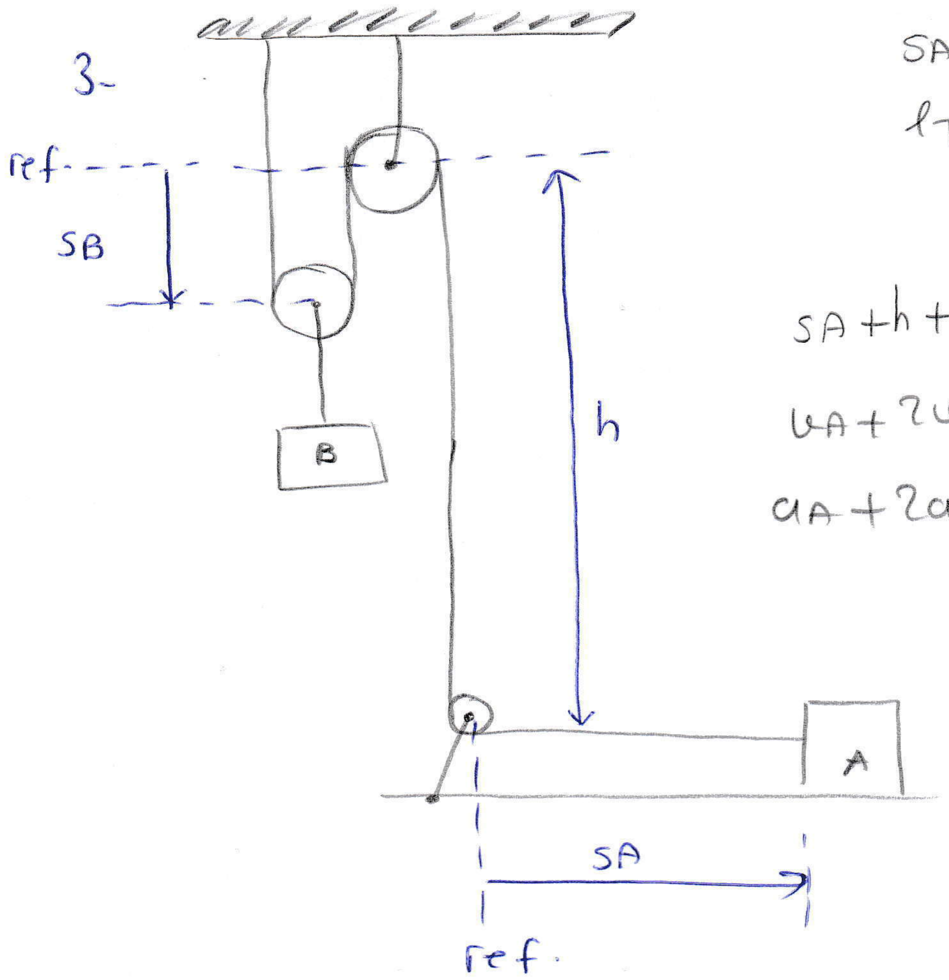
$$s_A + h + 2(h - s_B) = l_T$$

$$s_A + 3h - 2s_B = l_T$$

$$v_A - 2v_B = 0 \rightarrow v_A = 2v_B$$

$$a_A - 2a_B = 0 \rightarrow a_A = 2a_A$$

3-



2 tane ref. $\left.\begin{array}{l} s_A, s_B \\ l_T \end{array}\right\}$

$$s_A + h + 2s_B = l_T$$

$$v_A + 2v_B = 0 \Rightarrow v_A = -2v_B$$

$$a_A + 2a_B = 0 \Rightarrow a_A = -2a_B$$