4-PARÇACIK KİNETİĞİNDE İMPULS VE MOMENTUM YÖNTEMLERİ

→ Bu bölümde, Newton'un ikinci temel kanunu zamana göre integre edilir ve bu yolla impuls ve momentum ilkesi elde edilir. Elde edilen denklem kuvvet, hız ve zaman içeren problemleri çözmede işe yarar.

→ Parçacık olarak kabul edilen cisimler üzerine uygulanan kuvvetlerin belirli bir zaman aralığında etkimesi durumunda veya anlık olarak tanımlanabilecek kadar kısa bir zaman aralığında etkimesi durumunda cismin hareketinin değişimini incelemek üzere kullanılan bir yöntemdir.

→ Lineer impuls ve momentum ilkesi, lineer momentumun korunumu, açısal impuls ve momentum ilkesi ve açısal momentumun korunumu kavramı ve çarpışma mekaniği konuları bu bölümün kapsamına girer.

→ Cisim doğrusal bir yörüngede hareket ediyorsa lineer momentuma sahiptir ve lineer impuls ve momentum ilkesinden ve/veya lineer momentumun korunumundan söz edilir.

→ Cisim eğrisel bir yörüngede hareket ediyorsa lineer momentumla birlikte açısal momentuma da sahiptir ve böyle durumlarda lineer impuls ve momentum ilkesi ve/veya lineer momentumun korunumu ile birlikte açısal impuls ve momentum ilkesi ve/veya açısal momentum korunumundan söz edilir.

4.1. Lineer Momentum

→ Newton'un ikinci temel kanununun ifadesi değiştirilerek

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

veya parçacığın m kütlesi sabit olduğundan,

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

şeklinde yazılır. Burada $(m\vec{v})$ vektörüne parçacığın "lineer momentumu" veya kısaca "momentum" denir. Parçacığın hızıyla aynı doğrultudadır ve şiddeti parçacığın m kütlesiyle v hızının çarpımına eşittir. Bu denklem parçacığa etkiyen tüm kuvvetlerin bileşkesinin, parçacığın lineer momentumunun değişim hızına eşit olduğunu ifade eder. Bu ifade Newton'un ikinci temel kanununun başlangıçta ifade edildiği şeklidir.

→ Parçacığın lineer momentumunu $\vec{L}$ ile

$$\vec{L} = m\vec{v}$$

ve zamana göre türevini $\dot{\vec{L}}$ ile göstererek Newton'un ikinci temel kanununu

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{L})$$

$$\vec{F} = \dot{\vec{L}}$$

alternatif formunda yazabiliriz.

→ Bu denklemlerde parçacığın m kütlesinin sabit kabul edildiğine dikkat edilmelidir. Bu nedenle bu denklemler roketler gibi kütle kazanan veya kaybeden cisimlerin hareketini içeren problemleri çözmede kullanılmamalıdır.

→ $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ denkleminden $\vec{F} = 0$ olduğunda $m\vec{v}$ lineer momentumunun değişim hızının sıfır olduğu sonucu çıkmaktadır. Neticede, eğer bir parçacığa etkiyen bileşke kuvvet sıfırsa, parçacığın lineer momentumu hem şiddet hem doğrultuca sabit kalmaktadır. Bu ise Newton'un birinci kanununun alternatif bir ifade olarak da tanımlanabilen bir parçacık için lineer momentumun korunumu prensibidir.

4.2. Lineer İmpuls ve Momentum İlkesi

→ Parçacık için lineer impuls ve momentum ilkesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\int \vec{F}\,dt = \int_{v_1}^{v_2} m\,(d\vec{v})$$

$$\int \vec{F}\,dt = m\vec{v_2} - m\vec{v_1}$$

$m\vec{v_1} + \int \vec{F}\,dt = m\vec{v_2}$ "lineer impuls ve momentum ilkesi"

$$L_1 + I = L_2$$

Burada $L = mv$ parçacığın lineer momentumunu ve $I = \int \vec{F}\,dt$ parçacık üzerindeki lineer impulsu ifade eder.

→ $F = F(t)$ ise uygulanan kuvvet değişken bir kuvvettir ve impuls etkisi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = \int \vec{F}\,dt$$

→ $F = F_c = sbt$ ise uygulanan kuvvet sabit bir kuvvettir ve impuls etkisi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I = F_c \cdot \Delta t$$

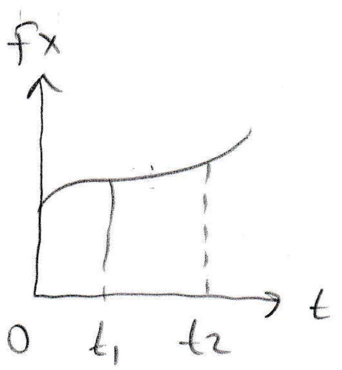
→ Lineer impuls ve momentum ilkesi vektörel bir denklemdir ve skaler bileşenler cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

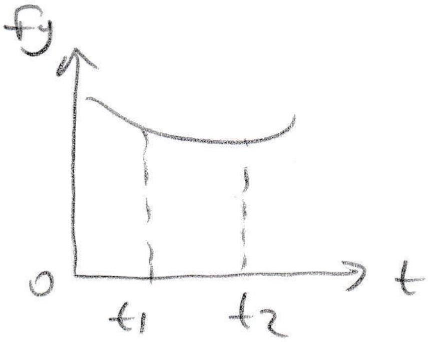
$$m v_1 x + \int F_x \, dt = m v_2 x$$

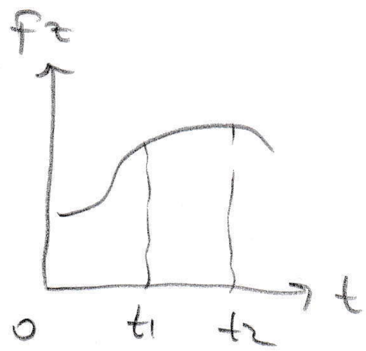
$$m v_1 y + \int F_y \, dt = m v_2 y$$

$$m v_1 z + \int F_z \, dt = m v_2 z$$

→ Burada $\vec{F}$ kuvvetinin impuls bileşenleri, sırasıyla, F_x, F_y ve F_z bileşenlerinin t'ye bağlı çizilerek oluşturdukları eğriler altında kalan alanlara eşittir.







→ SI birimleri kullanıldığında bir kuvvetin impulsunun şiddeti N.s cinsinden ifade olunur. Bu aynı zamanda lineer momentumun da birimidir.

$$N.s = \left(\frac{kg.m}{s^2}\right).s = \frac{kg.m}{s}$$

→ Bir parçacığa çeşitli kuvvetler etkiyorsa, her bir kuvvetin impulsu göz önüne alınmalıdır. Şu halde impuls momentum ilkesi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$m\vec{v_1} + \Sigma \overrightarrow{Imp_{1\to 2}} = m\vec{v_2}$$

→ Yine, elde edilen bu denklem, vektör büyüklükler arasındaki bir bağıntıdır. Bu denklem, bir problemin gerçek çözümünde, mukabil bileşen denklemleriyle değiştirilmelidir.

→ Bir problem, iki veya daha çok parçacık içerdiğinde her parçacık ayrı ayrı göz önüne alınabilir ve impuls momentum denklemi her parçacık için ayrı ayrı yazılabilir. Bütün parçacıkların momentumları ve mevcut tüm kuvvetlerin impulsları da toplanabilir. Bu takdirde

$$\Sigma m\vec{v_1} + \Sigma Imp_{1\to 2} = \Sigma m\vec{v_2}$$

yazılabilir.

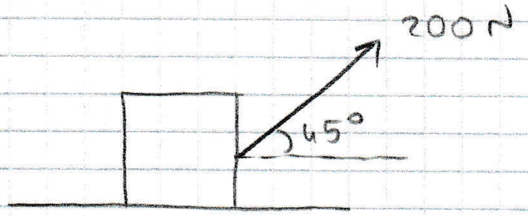
→ Parçacıkların birbirlerine uyguladıkları etki ve tepki kuvvetleri eşit ve zıt kuvvetler oluşturduğu ve t_1'den t_2'ye zaman aralığı, mevcut tüm kuvvetler için ortak olduğundan etki ve tepki kuvvetlerinin impulsları birbirlerini yok ederler ve sadece dış kuvvetlerin impulslarının göz önüne alınması gerekir.

→ Şayet paraacıklara hiçbir dış kuvvet etkimiyorsa veya daha genel bir ifadeyle dış kuvvetlerin toplamı sıfır ise impuls momentum denklemindeki ikinci terim sıfır olur ve denklem

$$\Sigma m\vec{v_1} = \Sigma m\vec{v_2}$$

haline indirgenir ki, bu bağıntı "paraacıkların toplam momentumunun korunumu" ifadesidir.

1- Şekilde gösterilen 100 kg'lık sandık, pürüzsüz yatay yüzey üzerinde durmaktadır. 45°'lik bir açıyla etkiyen 200 N'luk bir kuvvet 10 sn süreyle uygulandığına göre, sandığın son hızını ve bu zaman aralığında sandık üzerine etkiyen yüzey kuvvetlerini belirleyiniz.



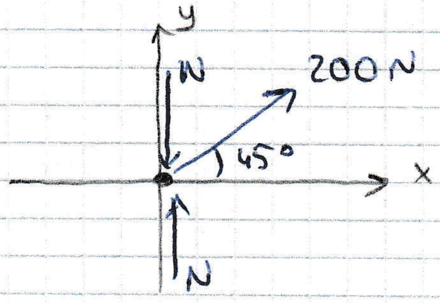
$m = 100\ kg$

$F_d = 0$

$v_0 = 0 \rightarrow v_1 = 0$

$\Delta t = 10\,sn \rightarrow v = ?$

$N = ?$



x-ekseni

$m v_{1x} + \Sigma \int F_x\, dt = m v_{2x}$

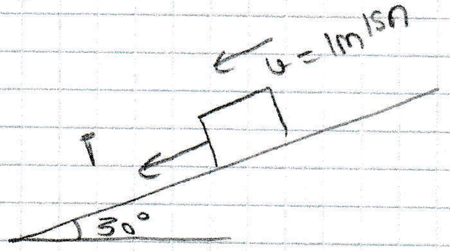
$0 + \{200 \cdot \cos 45 \cdot \Delta t\} = 100 \cdot v_2 \rightarrow v_2 = 14,1\ m/sn$

y-ekseni

$m v_{1y} + \Sigma \int F_y\, dt = m v_{2y}$

$0 + \{N \cdot \Delta t - N \cdot \Delta t + 200 \cdot \sin 45 \cdot \Delta t\} = 0 \rightarrow N = 840\ N$

2- Şekilde gösterilen 250 N'luk sandık, t saniye cinsinden olmak üzere $P=100.t$ N değişken büyüklüğüne sahip bir kuvvetin etkisi altındadır. Sandığın, P uygulandıktan 2sn sonraki hızını belirleyiniz. Sandık, düzlemden aşağı doğru $v_1=1$ m/sn'lik başlangıç hızına sahiptir ve sandık ve düzlem arasındaki kinetik sürtünme katsayısı $\mu_k=0.3$'tür.



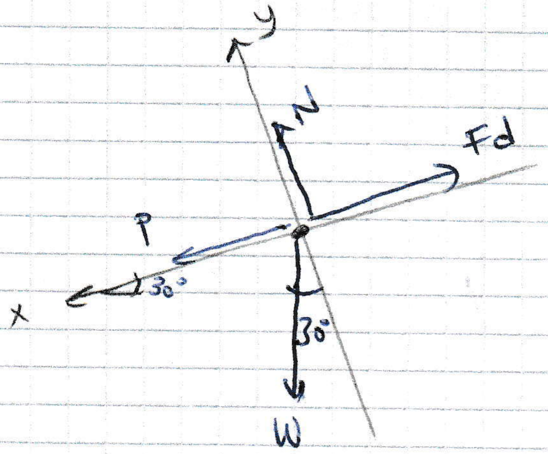
$W=250N \longrightarrow m=25,48\ kg$

$P=100.t\ N$

$\Delta t = 2sn \rightarrow v=?$

$v_1 = 1 m/sn$

$\mu_k = 0.3$



x-ekseni

$$m v_1 + \Sigma \int F_x\, dt = m v_2$$

$$25,48 . 1 + \left\{ W.\sin 30 . \Delta t + \int_0^2 100t\,dt - F_d . \Delta t \right\} = 25,48 . v_2$$

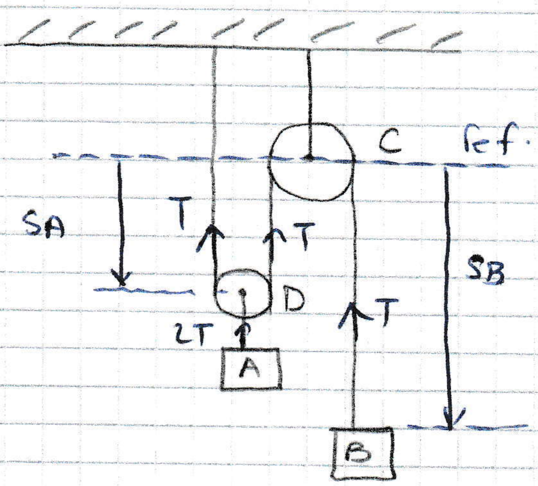
$F_d = ?$
$v_2 = ?$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - W.\cos 30 = 0 \longrightarrow N = 216,5 N$

$F_d = \mu_k . N \rightarrow F_d = 0,3 . 216,5 \longrightarrow F_d = 64,95 N$

$$25,48 . 1 + \left\{ 250 . \sin 30 . 2 + 50t^2 \Big|_0^2 - 64,95 . 2 \right\} = 25,48 . v_2 \rightarrow v_2 = 13,6 m/sn$$

3- Şekilde gösterilen A ve B blokların kütleleri, sırasıyla, 3 kg ve 5 kg'dır. Sistem, durmaktayken serbest bırakıldığına göre, B bloğunun 6 sn sonraki hızını belirleyiniz. İp ve makaraların kütlesini ihmal ediniz.



$m_A = 3 kg \rightarrow W_A = 29,43 N$

$m_B = 5 kg \rightarrow W_B = 49,05 N$

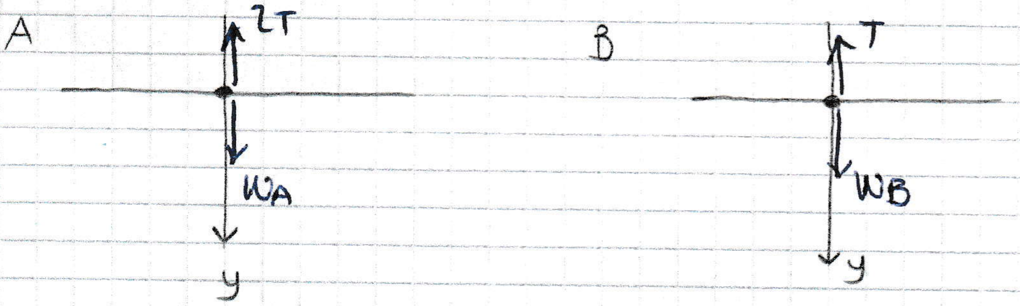
$v_1 = 0$

$\Delta t = 6 sn \Rightarrow v_{B2} = ?$

SA, SB
lT
1 tane ref. } belirlenir.

$2S_A + S_B = l_T$

$2v_A + v_B = 0 \rightarrow v_B = -2v_A$



A bloğu için imp. ve mom. ilkesi

$mv_1 + \Sigma\int F_y dt = mv_2$

$0 + \{W_A.\Delta t - 2T.\Delta t\} = 3.v_{A2} \rightarrow 176,58 - 12T = 3v_{A2}$

B bloğu için imp. ve mom. ilkesi

$mv_1 + \Sigma\int F_y dt = mv_2$

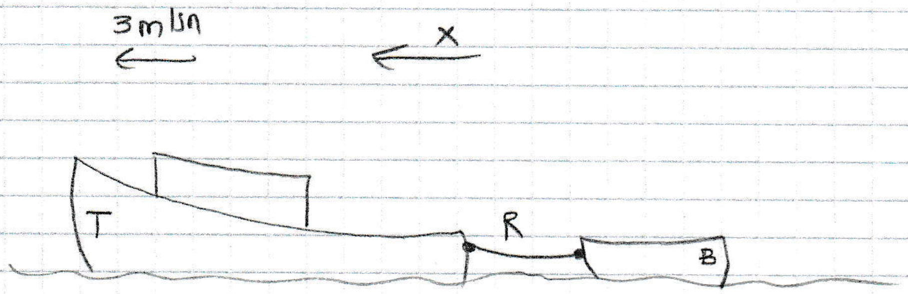
$0 + \{W_B.\Delta t - T.\Delta t\} = 5.v_{B2} \rightarrow 294,3 - 6T = 5v_{B2}$

$T = 19,2 N$

$v_{B2} = 35,8 m/sn$

$v_{A2} = -17,9 m/sn$

4- Şekilde gösterilen 350 Mg'lık bir T romörkörü bir R ipiyle, 50 Mg'lık B mavnasını çekmek için kullanılmaktadır. Mavna başlangıçta durağan halde bulunduğuna ve romörkör ip gevşekken $v_{T1}=3$ m/sn hızıyla serbestçe hareket ettiğine göre, romörkörün ip gergin hale geldiği andaki hızını belirleyiniz. İpin uzamadığını varsayınız. Suyun sürtünme etkilerini ihmal ediniz.



$m_T = 350$ Mg $\Rightarrow m_T = 350000$ kg

$m_B = 50$ Mg $\longrightarrow m_B = 50000$ kg

$v_{B1} = 0$

$v_{T1} = 3$ m/sn $\leftarrow$

$v_{T2} = v_{B2} = v_2 = ?$

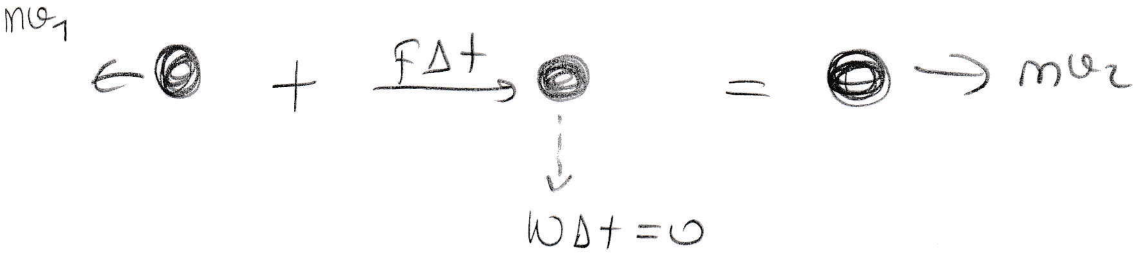
x-ekseni

$m_T . v_{T1} + m_B . v_{B1} = (m_T + m_B) v_2$

$350000 . 3 + 0 = 400000 . v_2 \rightarrow v_2 = 2{,}62$ m/sn $\leftarrow$

4.2.1. İmpulsif Hareket

→ Bir parçacığa çok kısa bir zaman aralığında etkiyen ve momentumda belli bir değişime yol açacak kadar büyük bir kuvvete "impulsif kuvvet" ve neticede oluşan harekete "impulsif hareket" denir. Örneğin, bir beysbol topuna vurulduğunda sopa ile top arasındaki temas çok kısa bir Δt zaman aralığında oluşur. Ancak sopanın topa uyguladığı $\vec{F}$ kuvvetinin ortalama değeri çok büyüktür ve sonuç impuls $\int \vec{F} dt$ topun hareketinin yönünü değiştirmeye yetecek kadar büyüktür.



→ Bir parçacığa impulsif kuvvetler etkiyince impuls momentum ilkesi aşağıdaki gibi yazılır.

$$m\vec{v_1} + \Sigma \vec{F} \Delta t = m\vec{v_2}$$

→ İmpulsif olmayan kuvvetler cismin ağırlığı, bir yayın uyguladığı kuvvet veya impulsif kuvvete kıyasla küçük olduğu bilinen herhangi kuvvetlerdir. Bilinmeyen tepki kuvvetleri impulsif olabilirler veya olmayabilirler. Dolayısıyla bunların impulsları ihmal edilebilir oldukları kanıtlanmadığı sürece impuls momentum denklemine dahil edilirler.

→ Örneğin, yukarıda ele alınan topun ağırlığının impulsu ihmal edilebilir. Sopanın hareketi analiz edilirse sopanın ağırlığının impulsu da ihmal edilebilir. Oyuncunun elinden ancak sopaya gelen reaksiyonun impulsu hesaba katılmalıdır. Topa uygunsuz vurulduysa bu impulslar ihmal edilebilir olmayacaktır.

→ Birkaç parçacığın impulsif hareketi halinde,

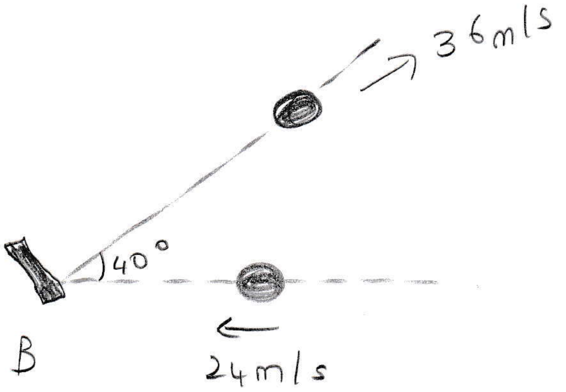
$$\Sigma m\vec{v_1} + \Sigma \vec{F} \Delta t = \Sigma m \vec{v_2}$$

denklemi kullanılır. Burada ikinci terim, sadece impulsif dış kuvvetleri kapsar. Çeşitli parçacıklara etkiyen tüm dış kuvvetler, impulsif olmayan kuvvetlerse buradaki ikinci terim kaybolur ve bu denklem,

$$\Sigma m\vec{v_1} = \Sigma m \vec{v_2}$$

denklemine indirgenir. Bu ifade "parçacıkların toplam momentumu korunumunun" ifadesidir. Bu durum, örneğin serbestçe hareket eden iki parçacık birbirleriyle çarpıştığında meydana gelir. Bununla birlikte parçacıkların toplam momentumu korunduğu halde toplam enerjileri genelde korunmamaktadır.

5 _ 120 g'lık beysbol topu, 24 m/s'lik bir hızla atıcıya gönderiliyor. Topa B sopasıyla vurulduktan sonra top, gösterilen doğrultuda 36 m/s'lik hız kazanıyor. Sopa ve top 0,015 s temasta kaldıklarına göre, vuruş sırasında topa uygulanan ortalama impulsif kuvveti bulunuz.



$m = 120\,g$

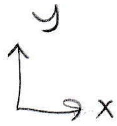
$v_1 = 24\ m/s$

$v_2 = 36\ m/s$

$\Delta t = 0{,}015\ s$

$\Sigma Imp_{1\to 2} = ?$

Topa impuls ve momentum ilkesini uygularız. Topun ağırlığı impulsif olmayan bir kuvvet olduğundan ihmal edilebilir.



$$m\vec{v_1} + \Sigma Imp_{1\to 2} = m\vec{v_2}$$

+x ekseni doğrultusunda impuls ve momentum ilkesi;

$$mv_{1x} + (\Sigma Imp_{1\to 2})_x = mv_{2x}$$

$$-(0{,}12)(24) + F_x \cdot 0{,}015 = (0{,}12) \cdot (36 \cdot \cos 40)$$

$$F_x = 412{,}6\ N$$

+y ekseni doğrultusunda impuls ve momentum ilkesi;

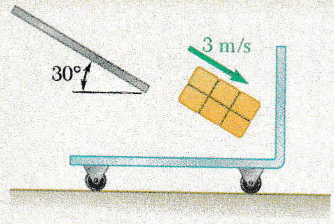
$$m v_{1y} + (\Sigma Imp_{1\to 2})_y = m v_{2y}$$

$$0 + F_y \cdot 0{,}015 = (0{,}12) \cdot (36 \cdot \sin 40)$$

$$F_y = 185{,}1 \text{ N}$$

F_x ve F_y bileşenlerinden $\vec{F}$ kuvvetinin şiddet ve doğrultusunu tespit ederiz.

6 -

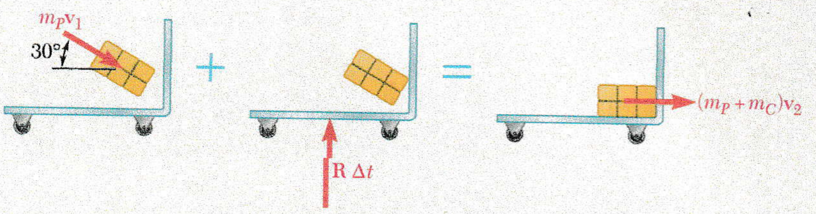


10 kg'lık paket bir oluktan 25 kg'lık bir arabaya 3 m/s'lik bir hızla düşüyor. Arabanın başlangıçta durduğu ve serbestçe hareket edebildiği bilindiğine göre; (*a*) arabanın son hızını, (*b*) arabanın pakete uyguladığı impulsu, (*c*) başlangıç enerjisinin çarpmada kaybolan kesrini tayin ediniz.

ÇÖZÜM

Araba ile paketin $\mathbf{v}_2$ hızını bulmak için evvela paket-araba sistemine impuls ve momentum ilkesini uygularız. Daha sonra aynı ilkeyi pakette uyarılan $\mathbf{F}\ \Delta t$ impulsunu bulmak için sadece pakete uygularız.

a. İmpuls-Momentum İlkesi: Paket ve Araba



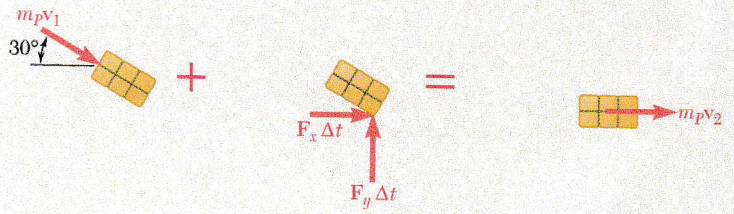
$$m_P\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to 2} = (m_P + m_C)\mathbf{v}_2$$

$\xrightarrow{+} x$ bileşenleri:

$$m_P v_1 \cos 30° + 0 = (m_P + m_C)v_2$$
$$(10\text{ kg})(3\text{ m/s})\cos 30° = (10\text{ kg} + 25\text{ kg})v_2$$
$$\mathbf{v}_2 = 0.742\text{ m/s}\rightarrow \quad ◀$$

Kullanılan denklemin x doğrultusunda momentumun korunumunu ifade ettiğini kaydedelim.

b. İmpuls-Momentum İlkesi: Paket



$$m_P\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to 2} = m_P\mathbf{v}_2$$

$\xrightarrow{+} x$ bileşenleri:

$$(10\text{ kg})(3\text{ m/s})\cos 30° + F_x\,\Delta t = (10\text{ kg})(0.742\text{ m/s})$$
$$F_x\,\Delta t = -18.56\text{ N}\cdot\text{s}$$

$+\uparrow y$ bileşenleri:

$$-m_P v_1 \sin 30° + F_y\,\Delta t = 0$$
$$-(10\text{ kg})(3\text{ m/s})\sin 30° + F_y\,\Delta t = 0$$
$$F_y\,\Delta t = +15\text{ N}\cdot\text{s}$$

Pakete uygulanan impuls $\quad \mathbf{F}\ \Delta t = 23.9\text{ N}\cdot\text{s} \measuredangle\ 38.9° \quad ◀$

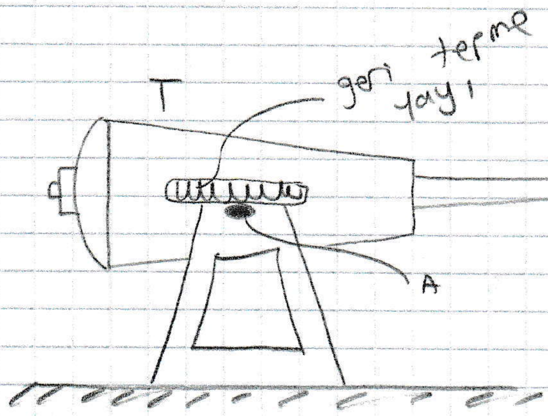
c. Kaybolan Enerjinin Kesri. Başlangıçtaki ve sondaki enerjiler:

$$T_1 = \tfrac{1}{2}m_P v_1^2 = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(3\text{ m/s})^2 = 45\text{ J}$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2}(m_P + m_C)v_2^2 = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg} + 25\text{ kg})(0.742\text{ m/s})^2 = 9.63\text{ J}$$

Kayıp enerji oranı:

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{45\text{J} - 9.63\text{J}}{45\text{J}} = 0.786 \quad ◀$$

7- Şekilde gösterildiği gibi, 6000 N'luk top, 40 N'luk bir mermiyi yere göre 650 m/sn'lik bir çıkış hızıyla ateşlemektedir. Ateşleme 0.03 sn'de gerçekleştiğine göre, a- topun ateşlemeden hemen sonraki geri tepme hızını, b- mermiye etki eden ortalama impulsif kuvveti belirleyiniz. Top desteği yerde sabit olup topun yatay geri tepmesi iki yay tarafından emilmektedir.



$W_T = 6000\,N \rightarrow m_T = 611,62\,kg$

$W_m = 40\,N \rightarrow m_m = 4,08\,kg$

$v_{T1} = 0$

$v_{m1} = 0$

$v_{m2} = 650\ m/sn$

$\Delta t = 0,03\,sn \Rightarrow v_{T2} = ?$

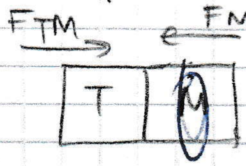
$F_{TM} = ?$

x-ekseni

$m_T . v_{T1} + m_m . v_{m1} = m_T . v_{T2} + m_m . v_{m2}$

$0 + 0 = 611,62 . (-v_{T2}) + 4,08 . 650 \longrightarrow v_{T2} = 3\,m/sn$

mermi için x-ekseni doğrultusunda imp. ve mom. ilkesi yazılır.



$m_m . v_{m1} + \Sigma \int F dt = m_m . v_{m2}$

$0 + \{ F_{TM} . \Delta t \} = 4,08 . 650$

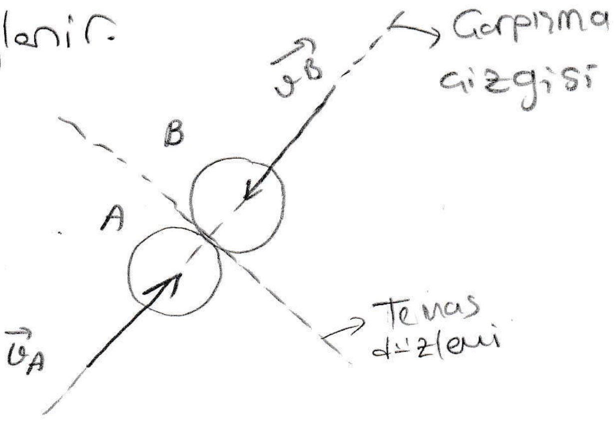
$F_{TM} = 61162\,N$

$F_{TM} = 61,2\ kN$

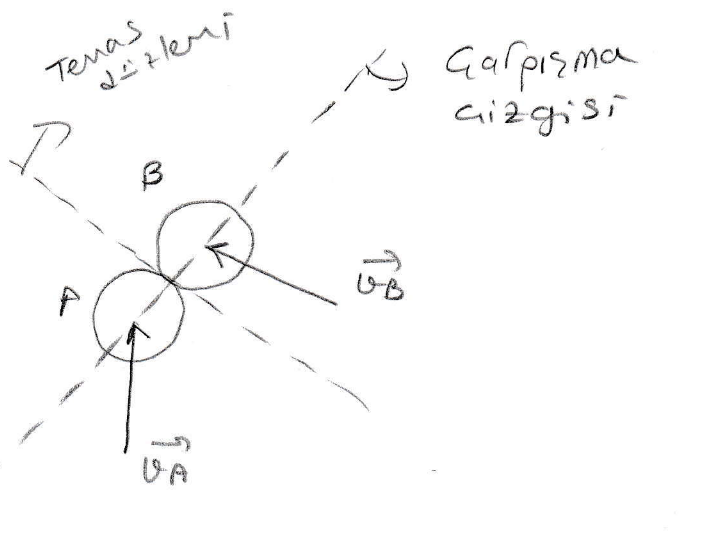
4.3. Çarpışma

→ İki cisim arasında çok küçük bir zaman aralığında meydana gelen ve bu esnada cisimlerin birbirlerine çok büyük kuvvetler uyguladıkları temasa "çarpışma" denir. Temasta bulunan yüzeylerin ortak normaline "çarpışma çizgisi" denir. Çarpışan iki cismin kütle merkezleri bu çizgi üzerinde bulunuyorsa çarpışma, "merkezi çarpışma"dır. Aksi halde çarpışmanın eksantrik (merkezi olmayan) olduğu söylenir. İki parçacığın merkezi çarpışması bu bölümün konusudur.

→ İki parçacığın hızları çarpışma çizgisi doğrultusunda ise çarpışmanın "düz çarpışma" olduğu söylenir. Parçacıkların biri veya ikisi çarpışma çizgisinden farklı bir çizgi boyunca hareket ediyorlarsa çarpışmanın "eğik çarpışma" olduğu söylenir.



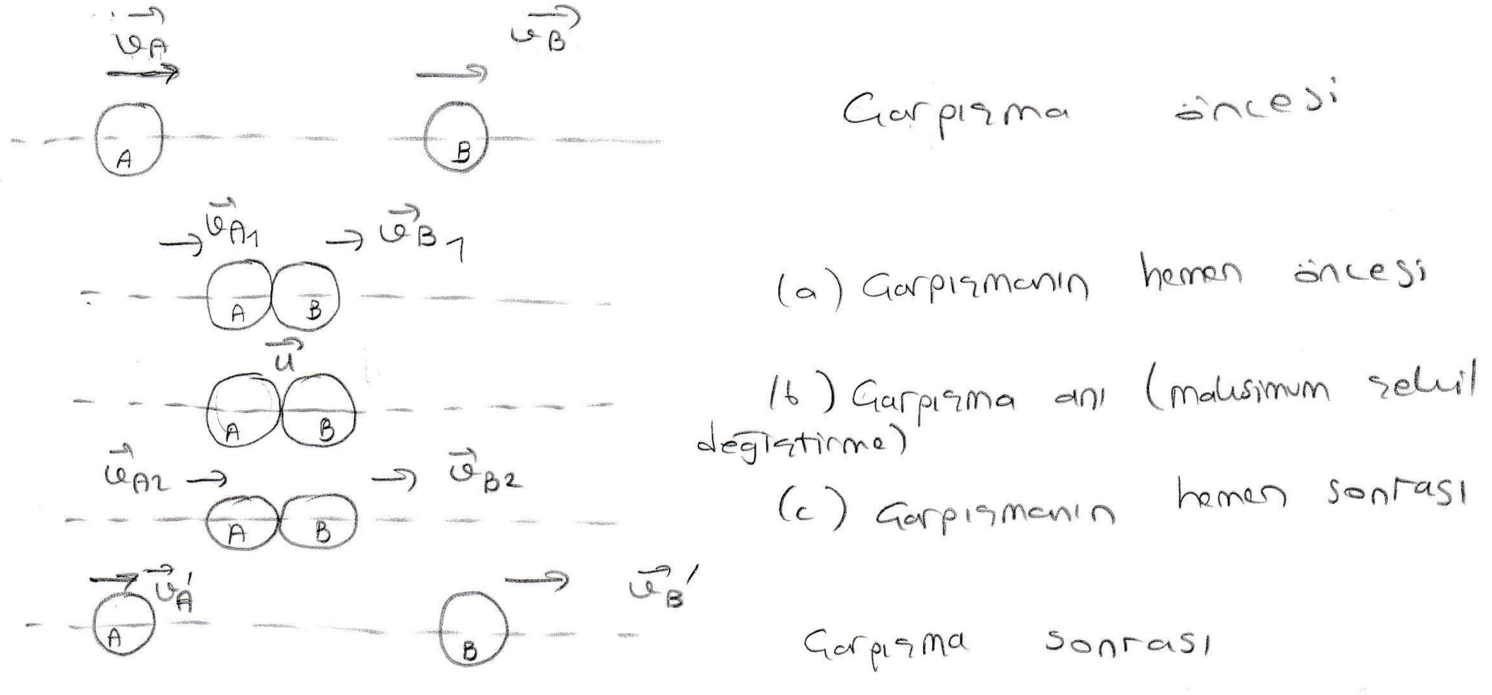
(a) Düz merkezi çarpışma



(b) Eğik merkezi çarpışma

4.3.1. Düz Merkezi Çarpışma

→ Aynı doğru üzerinde ve bilinen $\vec{v}_A$ ve $\vec{v}_B$ hızlarıyla sağa doğru hareket eden m_A ve m_B kütleli A ve B gibi iki parçacığı göz önüne alalım. $\vec{v}_{A1}$, $\vec{v}_{B1}$'den büyükse A muhtemelen B parçacığına vuracaktır (a). Çarpışma etkisinde bu iki parçacık "şekil değiştirecek" ve şekil değiştirme periyodunun sonunda aynı $\vec{u}$ hızına (b) sahip olacaklardır. Daha sonra, nihayetinde darbe kuvvetlerinin şiddetine ve söz konusu malzemelere bağlı olarak iki parçacığın tekrar orijinal şekillerine döneceği veya devamlı şekil değiştirmiş halde kalacakları bir "geri dönüş" süreci başlayacaktır. Burada bizim amacımız parçacıkların geri dönüş süreci sonundaki v_{A2} ve v_{B2} hızlarını tayin etmektir (c).



→ İki paraacığı, tek bir sistem olarak ele alırsak hiçbir impulsif dış kuvvetin olmadığını görürüz. Şu halde çarpışmanın hemen öncesinde ve hemen sonrasında toplam momentum korunur.

$$m_A \cdot \vec{v}_{A1} + m_B \cdot \vec{v}_{B1} = m_A \cdot \vec{v}_{A2} + m_B \cdot \vec{v}_{B2}$$ "lineer momentumun korunumu"

→ Düz merkezi çarpışmada tüm bu hızlar çarpışma çizgisi ekseni ile aynı doğrultuda olduklarından, bu denklemi sadece skaler bileşenleri kapsayan aşağıdaki bağıntıyla değiştirebiliriz.

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}$$

→ Çarpışma anında iç impulsif kuvvetler ortaya çıkar. Her bir cisme bu an için ayrı ayrı lineer impuls ve momentum ilkesi uygulanarak bu iç impulsif kuvvetler belirlenir.

→ $\vec{v}_{A2}$ ve $\vec{v}_{B2}$ hızlarını bulmak için ikinci bir bağıntı daha kurmak gereklidir. Bunun için çarpışma anında oluşan şekil değiştirme periyodundan elde edilen ve "çarpışma katsayısı" olarak adlandırılan bir e katsayısı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$e = \left| \frac{v_{B2} - v_{A2}}{v_A - v_B} \right| = \frac{|\text{izafi ayrılma hızı}|}{|\text{izafi yaklaşma hızı}|} \quad (v_A > v_B)$$

→ Çarpışma katsayısının (e) değeri, daima 0 ile 1 arasındadır.

→ Çarpışmanın iki özel halinden söz edilebilir.

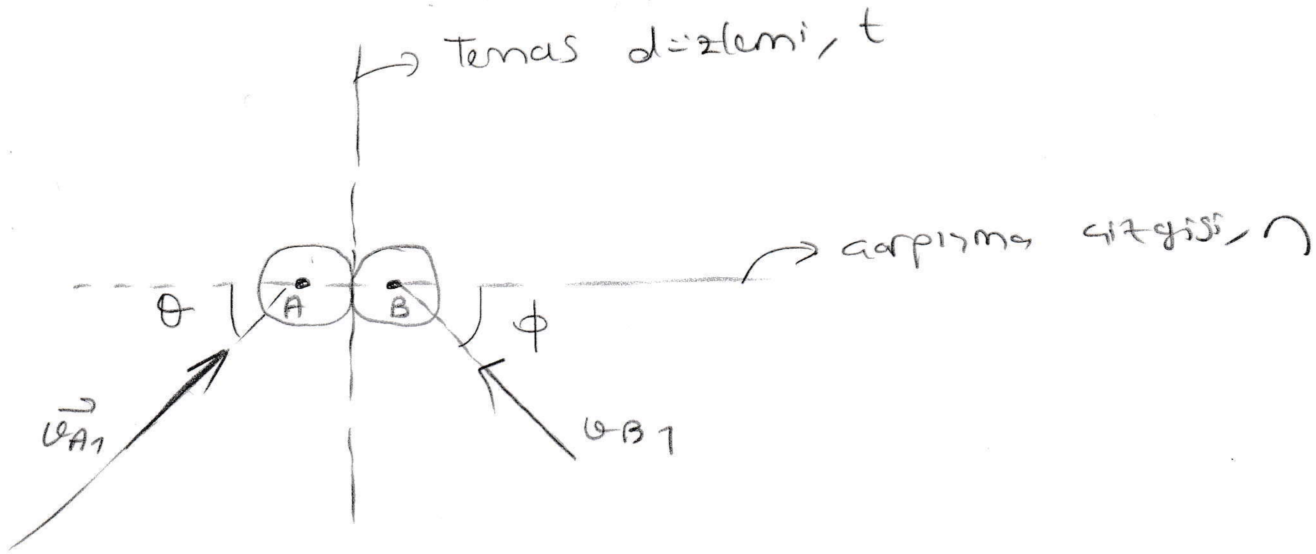
1- e=0, Mükemmel plastik çarpışma. Çarpışmadan hemen sonra parçacıklar birlikte ortak bir hızla hareket eder.

$$m_A \cdot v_{A1} + m_B \cdot v_{B1} = (m_A + m_B) \cdot v_2$$

2- e=1, Mükemmel elastik çarpışma. Çarpışmada enerji kaybı olmaz. Parçacıklar, çarpışmadan sonra birbirlerinden çarpışmadan önceki aynı hızla ayrılırlar. Mükemmel elastik çarpışma halinde iki parçacığın toplam momentumunun yanı sıra toplam enerji de korunur. Ancak genel çarpışma halinde, yani e değerinin 1'e eşit olmadığı durumda, parçacıkların toplam enerjisi korunmaz. Kaybolan kinetik enerji kısmen ısıya dönüştürülür, kısmen de çarpışan iki cisimde elastik dalgalar üretmede harcanır.

4.3.2. Eğik Merkezi Çarpışma

→ Şimdi çarpışan iki cismin hızlarının doğrultu olarak çarpışma çizgisi üzerinde olmadığı ve eğik çarpışma olarak adlandırılan hali göz önüne alalım.



→ Eğik çarpışmada toplam momentum çarpışma çizgisi doğrultusunda korunur.

$$m_A \cdot (v_{A1})_n + m_B \cdot (v_{B1})_n = m_A \cdot (v_{A2})_n + m_B \cdot (v_{B2})_n$$

→ Ayrı ayrı ele alındıklarında her parçacığın momentumu t ekseni doğrultusunda korunur.

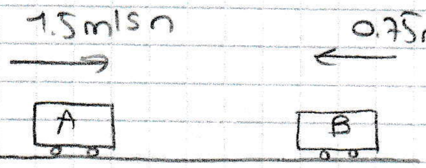
$$(v_{A1})_t = (v_{A2})_t$$

$$(v_{B1})_t = (v_{B2})_t$$

→ Eğik çarpışmada çarpışma katsayısı çarpışma çizgisi doğrultusundaki (n) bileşenler cinsinden yazılır.

$$e = \frac{\left| (v_{B2})_n - (v_{A2})_n \right|}{\left| (v_{A1})_n - (v_{B1})_n \right|}$$

8- 15 Mg'lık A yük vagonu, şekilde gösterildiği gibi, 12 Mg'lık bir kütleye sahip olan ve 0.75 m/sn'lik bir hızla yatay bir yol üzerinde hareket eden B tankeri ile karşılaştığında, 1.5 m/sn'lik bir hızla tankere doğru serbestçe hareket etmektedir. Vagonlar çarpıştığına ve birlikte hareket ettiğine göre, a- her iki arabanın çarpışma sonrasındaki hızını, b- çarpışmanın 0.8 sn sürmesi halinde arabalar arasındaki ortalama impulsif kuvveti belirleyiniz.



$m_A = 15$ Mg $= 15000$ kg

$m_B = 12$ Mg $= 12000$ kg

$v_A = 1.5$ m/sn $\rightarrow$

$v_B = 0.75$ m/sn $\leftarrow$

$v_2 = ?$

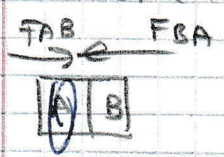
$\Delta t = 0.8$ sn $\rightarrow$ $F_{imp} = ?$

$\rightarrow +x$ alalım.

x-ekseni

$m_A \cdot v_{A1} + m_B \cdot v_{B1} = (m_A + m_B) v_2$

$15000 \cdot (1{,}5) + 12000 \cdot (-0{,}75) = 27000 \cdot v_2 \rightarrow v_2 = +0{,}5$ m/sn



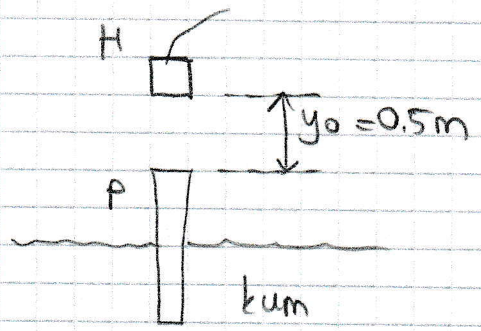
A için imp. ve momentum ilkesini uygulayalım.

$m_A \cdot v_{A1} + \Sigma \int F dt = m_A \cdot v_{A2}$

$15000 \cdot 1{,}5 + \{-F_{BA} \cdot \Delta t\} = 15000 \cdot 0{,}5 \rightarrow F_{BA} = 18750$ N

$F_{BA} = 18{,}75$ kN

9- Şekilde gösterilen rijit bir P kazığı, 800 kg'lık kütleye sahiptir ve 300 kg kütleli bir H çekici kullanılarak yere çakılmaktadır. Çekiç, $y_0 = 0.5$ m yükseklikte durağan halde bulunduğu konumdan harekete başlayarak kazığın tepesine çarpmaktadır. Kazık gevşek bir kum tabakasıyla sarıldığına ve çarpmadan sonra çekiç geri sıçramadığına göre, çekicin kazığa verdiği impulsu belirleyiniz.

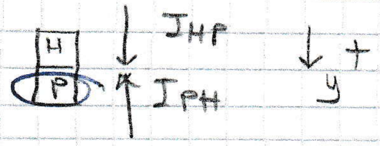


$m_P = 800$ kg $\rightarrow$ $W_P = 7848$ N

$m_H = 300$ kg $\rightarrow$ $W_H = 2943$ N

$v_{H0} = 0$

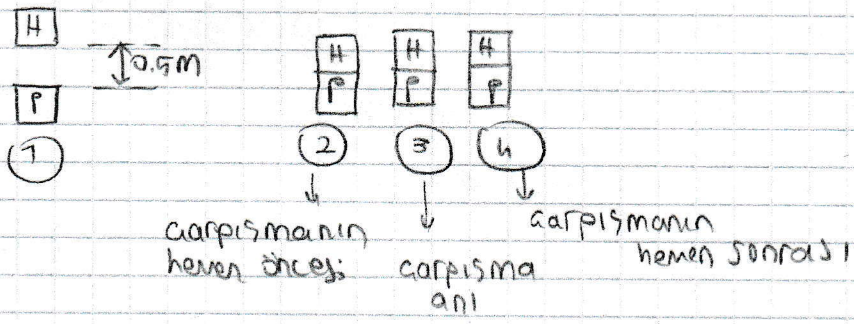
$I_{HP} = ?$



P kazığı için imp. ve momentum ilkesi

$m_P \cdot v_{P1} + \Sigma \int F_y \, dt = m_P \cdot v_{P2}$

$0 + \{I_{HP}\} = 800 \cdot v_{P2} \rightarrow$ v_{P2}'yi bulmalıyız.



1 → çarpışmanın hemen öncesine kadar H çekici için enerji korunur.

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$0 + W_H \cdot 0{,}5 = \frac{1}{2} m_H v_2^2 + 0 \rightarrow v_2 = 3{,}13$ m/sn

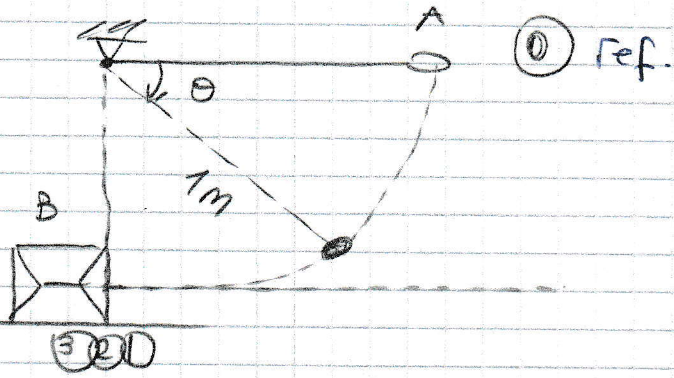
2 ve 4 anlarında toplam momentum korunur.

$m_H \cdot v_{H2} + m_P \cdot v_{P2} = (m_H + m_P) \cdot v_4$

$300 \cdot 3{,}13 + 0 = 1100 \cdot v_4 \rightarrow v_4 = 0{,}854$

$v_4 = v_{P2} \rightarrow I_{HP} = 800 \cdot v_{P2} \rightarrow I_{HP} = 683$ N.sn

10- 30 N ağırlığındaki A torbası, şekilde gösterildiği gibi, $\theta=0°$ konumunda durmaktayken serbest bırakılıyor. Torba $\theta=90°$ konumuna düştükten sonra, 90 N'luk B kutusuna çarpıyor. Torba ve kutu arasındaki geri dönme katsayısı $e=0.5$ olduğuna göre, torba ve kutunun, çarpışmadan hemen sonraki hızlarını ve enerji kaybını belirleyiniz.



$W_A = 30\,N \rightarrow m_A = 3{,}06\,kg$

$\theta_0 = 0° \rightarrow v_{0A} = 0$

$\theta = 90° \rightarrow v_{A2} = ?\ \ v_{B2} = ?$

$e = 0.5$

$W_B = 90N \rightarrow m_B = 9{,}2\,kg$

0 ve 1 arasında A torbasının enerjisi korunur.

$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$ $\quad (V = V_g = W.y \Rightarrow$ ref. belirlemeli$)$

$0 + 0 = \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 - W.y$

$0 = \frac{1}{2}.3{,}06.v_{A1}^2 - 30.1 \rightarrow v_{A1} = 4{,}43\ m/sn$

1 ve 3 arasında toplam momentum korunur (çarpışmanın hemen öncesi ve hemen sonrası)

$m_A.v_{A1} + m_B.v_{B1} = m_A.v_{A3} + m_B.v_{B3}$ $\quad (\overset{+}{\leftarrow})$

$3{,}06.4{,}43 + 0 = 3{,}06.v_{A3} + 9{,}2.v_{B3}$

$3{,}06 v_{A3} + 9{,}2 v_{B3} = 13{,}56$

1 ve 3 arasında geri dönme katsayısı da kullanılır.

$e = \frac{v_{B3} - v_{A3}}{v_{A1} - v_{B1}} \rightarrow 0{,}5 = \frac{v_{B3} - v_{A3}}{4{,}43 - 0} \rightarrow v_{B3} - v_{A3} = 2{,}215$

$v_{A3} = -0{,}55\ m/sn \qquad v_{B3} = 1{,}66\ m/sn$ bulunur.

1 ve 3 arasında iş ve enerji ilkesini uygulayarak enerji kaybı elde edilebilir.

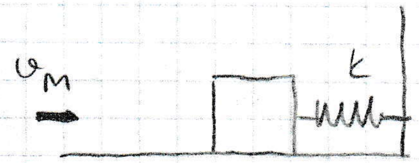
$T_1 + \Sigma U_{1-3} = T_3 \rightarrow T_3 - T_1 = \Sigma U_{1-3}$

$\Sigma U_{1-3} = \left(\frac{1}{2} m_A v_{A3}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B3}^2\right) - \left(\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2\right)$

$\Sigma U_{1-3} = \left(\frac{1}{2}.3{,}06\,(-0{,}55)^2 + \frac{1}{2}.9{,}2.1{,}66^2\right) - \left(\frac{1}{2}\,3{,}06.4{,}43^2 + 0\right)$

$\Sigma U_{1-3} = -16{,}887\ J$

12- 20 gr'lık bir mermi, pürüzsüz bir yüzey üzerinde duran 300 gr'lık bloğa yatay olarak ateşlenmiştir. Mermi bloğa girdikten sonra, blok anlık durusu yapmadan önce sağa doğru 0.3 m hareket etmiştir. Merminin $(v_M)_1$ hızını belirleyiniz. Yay katsayısı $k=200$ N/m' dir ve yay başlangıçta uzamamış durumdadır.



$k = 200$ N/m

$m_B = 300$ gr $= 0{,}3$ kg

$m_M = 20$ gr $= 0{,}02$ kg

$F_d = 0$

$v_{B_0} = 0$

$s = 0{,}3$ m $\rightarrow v_B = 0$

$(v_M)_1 = ?$

Merminin bloğa çarpma hızı, yani çarpışmadan hemen önceki hızı soruluyor.

Blok çarpışmadan hemen önce hızsız olarak duruyor. Çarpışmanın hemen sonrasında blok ve mermi birlikte hareket etmeye başlıyor.

Blok ve mermi birlikte hız 0 olana kadar yani yay 0.3 m sıkıştırılıncaya kadar hareket sürüyor.

Problemin kapsamı: 1- Çarpışmanın hemen öncesi ve hemen sonrası 2- Çarpışmanın hemen sonrası başlayan ve 0.3 m yer değiştirdikten sonra (blok ve mermi birlikte) biten hareket.

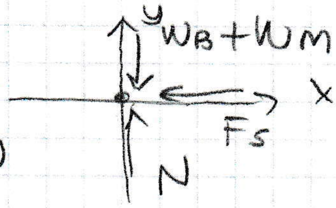
x ekseni doğrultusunda toplam momentum korunur.

$m_M (v_M)_1 + m_B (v_B)_1 = (m_M + m_B) . v_2$

$0{,}02 . (v_M)_1 + 0{,}3 . 0 = (0{,}02 + 0{,}3) . v_2$

$0{,}02 . (v_M)_1 = 0{,}32 . v_2 \rightarrow$ iki adet bilinmeyen var.

Çarpışmadan hemen sonra başlayıp hareket bitene kadar olan durum



$T_2 + \Sigma U_{2-3} = T_3$

$\frac{1}{2} (m_M + m_B) . v_2^2 + \left\{ -\left(\frac{1}{2} k s_2^2 - \frac{1}{2} k s_1^2 \right) \right\} = 0$

$\frac{1}{2} . 0{,}32 . v_2^2 - \left(\frac{1}{2} . 200 . (-0{,}3)^2 - \frac{1}{2} . 200 . 0 \right) = 0$

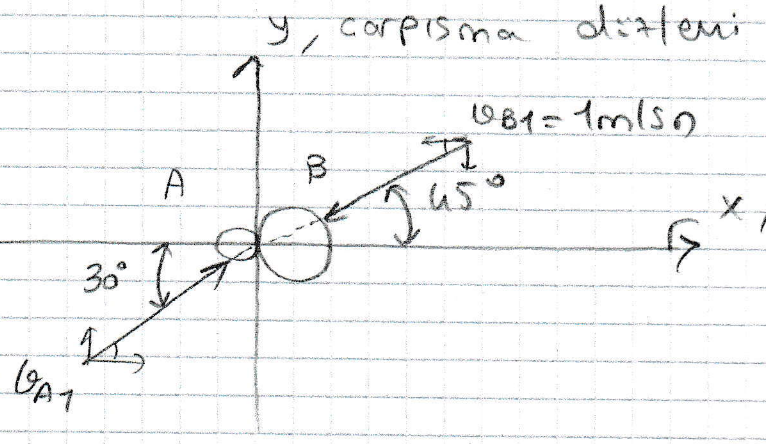
$s_1 = 0$

$s_2 = -0.3$ m

$v_2 = 7{,}5$ m/sn

$0{,}02 (v_M)_1 = 0{,}32 . v_2 \rightarrow (v_M)_1 = 120$ m/sn

13- Kütleleri, sırasıyla, 1 kg ve 2 kg olan pürüzsüz A ve B diskleri şekilde gösterilen hızlarla çarpışıyorlar. Diskler için geri dönme katsayısı e=0.75 olduğuna göre, disklerin çarpışma sonrasındaki son hızlarının x ve y bileşenlerini belirleyiniz. Sürtünmeyi ihmal ediniz.



$m_A = 1 kg$
$m_B = 2 kg$
$e = 0.75$

Çarpışma çizgisi boyunca (x-ekseni) toplam momentum korunur.

$$m_A \cdot v_{A1x} + m_B \cdot v_{B1x} = m_A \cdot v_{A2x} + m_B \cdot v_{B2x}$$

$$1 \cdot 3 \cdot \cos 30 + 2 \cdot (-1 \cdot \cos 45) = 1 \cdot v_{A2x} + 2 \cdot v_{B2x}$$

$$v_{A2x} + 2 v_{B2x} = 1{,}2$$

Çarpışma çizgisi boyunca (x-ekseni) geri dönme katsayısı

$$e = \frac{v_{B2x} - v_{A2x}}{v_{A1x} - v_{B1x}} \Rightarrow 0{,}75 = \frac{v_{B2x} - v_{A2x}}{2{,}6 - (-0{,}707)} \Rightarrow v_{B2x} - v_{A2x} = 2{,}48$$

$$\left.\begin{aligned} v_{A2x} + 2 v_{B2x} &= 1{,}2 \\ -v_{A2x} + v_{B2x} &= 2{,}48 \end{aligned}\right\} \quad v_{A2x} = -1{,}26 \text{ m/sn} \quad v_{B2x} = 1{,}22 \text{ m/sn}$$

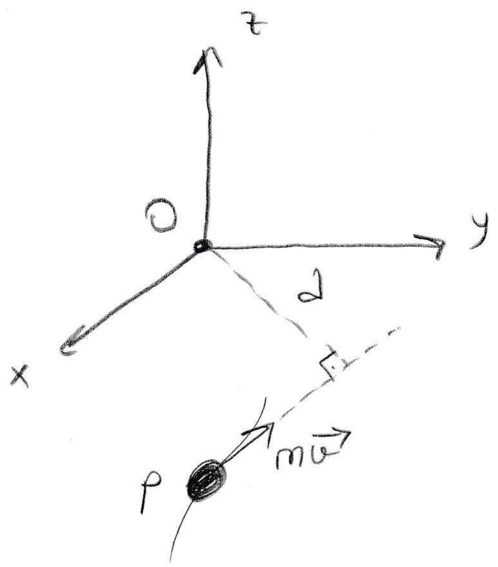
Çarpışma düzlemi boyunca (y-ekseni) her bir diskin tek tek momentumu korunur.

$$v_{A1y} = v_{A2y} \rightarrow v_{A2y} = 1{,}5 \text{ m/sn}$$

$$v_{B1y} = v_{B2y} \rightarrow v_{B2y} = -0{,}707 \text{ m/sn}$$

4.4. Açısal Momentum

→ Bir paracığın O noktasına göre açısal momentumu, paracığın O noktasına göre "lineer momentumunun momenti" olarak tanımlanır.



$$(H_o)_z = (d)(mv)$$

$$\vec{H_o} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\vec{H_o} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

→ Bir kuvvetin momenti ile açısal momentum arasındaki ilişki.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$$

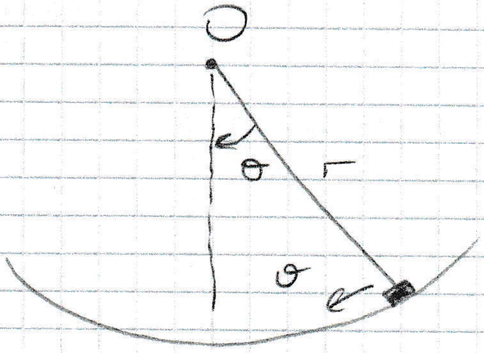
$$\vec{M_o} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}}$$

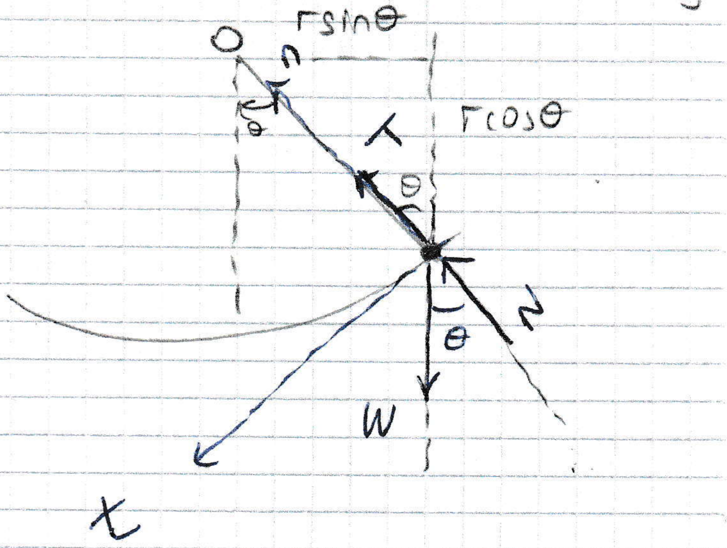
$$\vec{H_o} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\dot{\vec{H_o}} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{M_o} &= \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} \\ \dot{\vec{H_o}} &= \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} \end{aligned}\right\} \quad \vec{M_o} = \dot{\vec{H_o}}$$

14- Şekilde gösterilen m kütleli kutu, θ açısı ile belirli konumdayken v hızına sahip olacak şekilde, pürüzsüz dairesel rampadan aşağı doğru ilerlemektedir. Kutunun, bu andaki O'ya göre açısal momentumunu ve hızındaki artım oranını belirleyiniz.





Açısal momentum;

$H_O = r m v$

Hızdaki artım oranı;

$\Sigma M_O = \dot{H}_O$

$W \sin\theta . r = \frac{d}{dt}(r m v)$ → r ve m sbt'tir.

$mgr\sin\theta = mr\frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\theta \rightarrow \dot{v} = g\sin\theta$

Aynı sonuç, teğetsel doğrultuda oluşturulan hareket denklemlerinden elde edilebilir.

$\Sigma F_t = m a_t$

$W\sin\theta = m\frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\theta \rightarrow \dot{v} = g\sin\theta$

4.5. Açısal İmpuls ve Momentum İlkesi

→ Açısal impuls ve momentum ilkesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\vec{M_o} = \dot{\vec{H_o}}$$

$$\vec{M_o} = \frac{d\vec{H_o}}{dt}$$

$$\int \vec{M_o}\, dt = \int d\vec{H_o}$$

$$\int \vec{M_o}\, dt = \vec{H_{o2}} - \vec{H_{o1}}$$

$$\vec{H_{o1}} + \int \vec{M_o}\, dt = \vec{H_{o2}}$$ "açısal impuls ve momentum ilkesi"

→ Lineer ve açısal impuls ve momentum ilkesini kullanarak, eğrisel bir yörüngede parçacığın hareketini tanımlayan iki vektörel denklem yazmak mümkündür.

$$m\vec{v_1} + \Sigma \int \vec{F}\, dt = m\vec{v_2}$$

$$(\vec{H_o})_1 + \Sigma \int \vec{M_o}\, dt = (\vec{H_o})_2$$

→ Skaler formülasyonu parçacığın xy-düzlemindeki hareketi için yazalım.

$$m v_{1x} + \Sigma \int F_x \, dt = m v_{2x}$$

$$m v_{1y} + \Sigma \int F_y \, dt = m v_{2y}$$

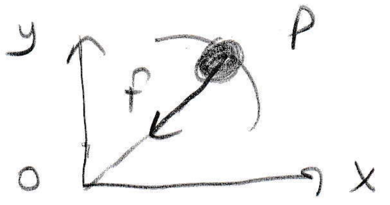
$$(H_O)_1 + \Sigma \int M_O \, dt = (H_O)_2$$

→ t_1'den t_2'ye kadar geçen sürede, parçacık üzerine etki eden açısal impulslar sıfır olduğu zaman, açısal momentum korunur.

$$(\vec{H}_O)_1 = (\vec{H}_O)_2 \qquad \text{"açısal momentumun korunumu"}$$

→ Parçacığa hiçbir dış impuls uygulanmazsa, lineer ve açısal momentumun ikisi de korunur.

→ Ancak parçacık sadece merkezsel bir kuvvete maruz kaldığı zaman, parçacığın açısal momentumu korunur, lineer momentumu korunmaz.



$$(\vec{H}_O)_1 = (\vec{H}_O)_2$$

→ Hareket doğal koordinatlarda tanımlanıyorsa:

$$H_1 = H_2$$

$$r_1 m v_1 = r_2 m v_2 \qquad (v = v_t)$$

→ Hareket kutupsal koordinatlarda tanımlanıyorsa:

$$H_1 = H_2$$

$$r_1 m v_1 = r_2 m v_2 \qquad (v = v_\theta)$$

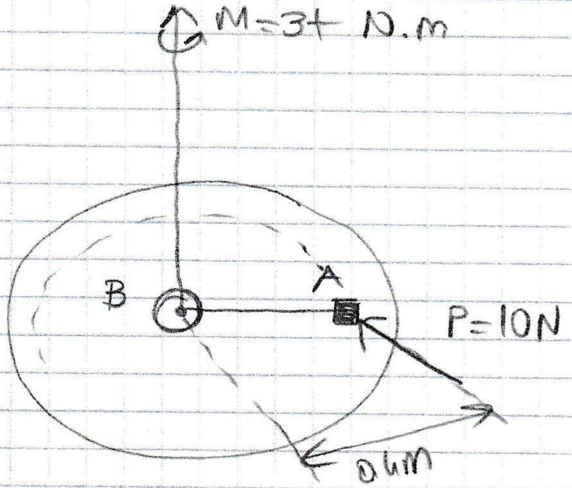
→ Hızın radyal doğrultudaki bileşeni:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

→ Bileşke hız

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$$

15 - Boyutları ihmal edilebilen 5 kg'lık bir blok pürüzsüz yatay düzlemde durmaktadır ve A'da, kütlesi ihmal edilebilen ince bir çubuğa bağlanmıştır. Çubuk, B'deki yuvada bulunan bir topa bağlıdır. Şekilde gösterildiği gibi, çubuğa, t sn cinsinden olmak üzere, bir M=3t N.m momenti, bloğa yatay bir P=10 N kuvveti uygulandığına göre, bloğun, durağan halden harekete başlayarak 4 sn'de ulaşacağı hızı belirleyiniz.



$m=5\,kg$

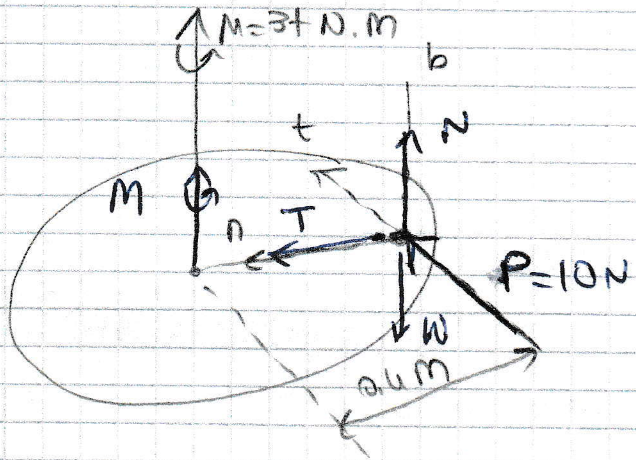
$F_d=0$

$v_0=0$

$M=3t$ N.m

$P=10$ N

$\Delta t=4$ sn $\rightarrow v=?$



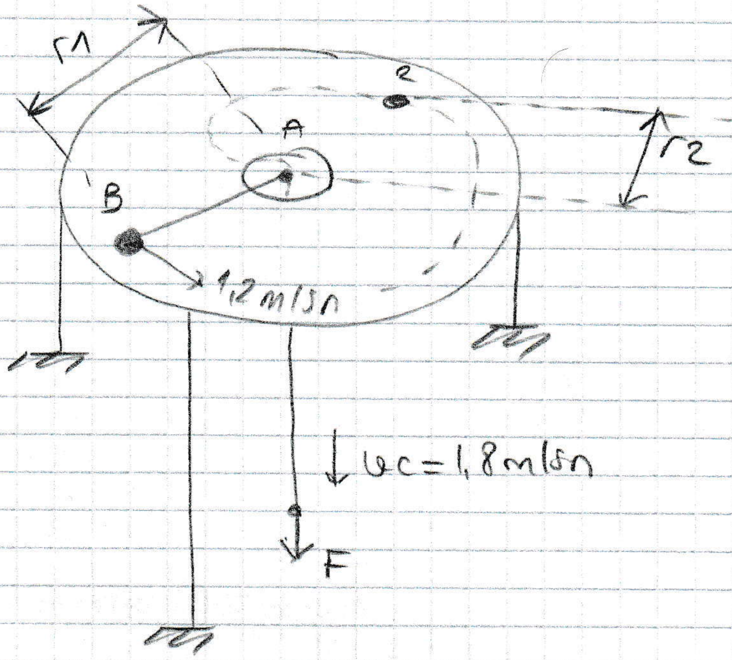
b- eksenine göre açısal impuls ve momentum ilkesi

$H_1+\Sigma\int M_b\,dt=H_2$

$mv_1r+\left\{10.0{,}4.\Delta t+\int_0^4 3t\,dt\right\}=mv_2r$

$0+16+\left.\frac{3t^2}{2}\right]_0^4=5.v_2.0{,}4 \rightarrow v_2=20$ m/sn

16- Şekilde gösterilen 4 N ağırlığındaki B topu, pürüzsüz bir masa üzerinde, A'daki bir delikten geçen bir ipe bağlanmıştır. Top, delikten $r_1 = 0{,}53$ m uzaktayken, hızı $v_1 = 1{,}2$ m/sn olacak şekilde dairesel bir yörüngede bulunmaktadır. İp, bir F kuvveti uygulanarak $v_C = 1{,}8$ m/sn sbt hızıyla aşağı doğru çekildiğine göre, a- topun delikten $r_2 = 0{,}18$ m uzakta bulunduğu andaki hızını, b- radyal uzaklık r'nin kısalması süresince F kuvveti tarafından yapılan iş miktarını belirleyiniz.



$W = 4N \rightarrow m = 0{,}41$ kg

$F_d = 0$

$r_1 = 0{,}53m \Rightarrow v = 1{,}2$ m/sn

$v_C = 1{,}8$ m/sn $=$ sbt

$r_2 = 0{,}18m \Rightarrow v = ?$

$U_F = ?$

$H_1 = H_2 \qquad (v_1 = v_\theta = 1{,}2 \text{ m/sn})$

$r_1 \cdot m\, v_{1\theta} = r_2\, m\, v_{2\theta}$

$0{,}53 \cdot 1{,}2 = 0{,}18 \cdot v_{2\theta} \rightarrow v_{2\theta} = 3{,}53$ m/sn

$v_r = 1{,}8$ m/sn $=$ sbt

$v_2 = \sqrt{v_{2r}^2 + v_{2\theta}^2} \rightarrow v_2 = \sqrt{1{,}8^2 + 3{,}53^2} \rightarrow v_2 = 3{,}96$ m/sn

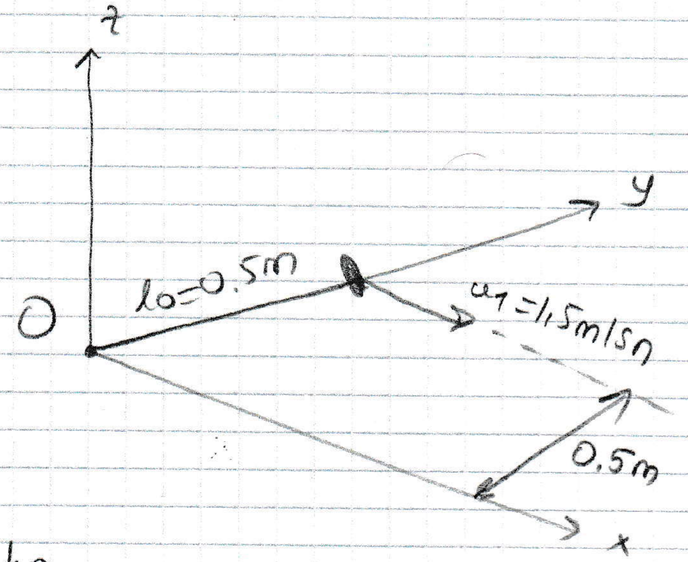
Top üzerinde iş yapan tek kuvvet F kuvvetidir. O halde,

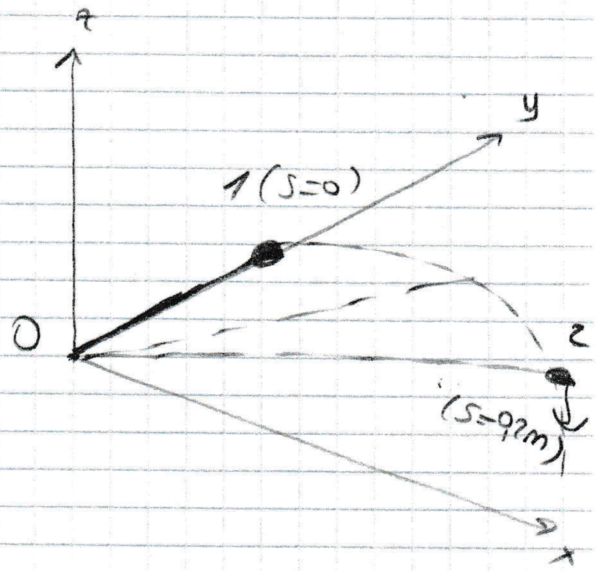
$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$\frac{1}{2} m v_1^2 + U_F = \frac{1}{2} m v_2^2$

$\frac{1}{2} \cdot 0{,}41 \cdot 1{,}2^2 + U_F = \frac{1}{2} \cdot 0{,}41 \cdot 3{,}96^2 \rightarrow U_F = 2{,}9 J$

17- Şekilde gösterilen, pürüzsüz bir yatay yüzey üzerinde duran 2 kg'lık disk, katsayısı $k=20$ N/m dan ve başlangıçta uzamamış konumda bulunan elastik bir kordona bağlanmıştır. Diske, kordona dik bir $v_{01}=1,5$ m/sn hızı verildiğine göre, kordonun uzama hızını ve diskin, kordonun 0,2 m uzadığı andaki hızın büyüklüğünü belirleyiniz.





$m=2\,kg$

$k=20\,N/m$

$v_1=v_{1\theta}=1,5\,m/sn$

$l_0=0.5\,m$

$s=0,2\,m \rightarrow v_{2r}=?\quad v_{2\theta}=?\quad v_2=?$

$H_{O1}=H_{O2}$

$r_1 m v_{1\theta}=r_2 m v_{2\theta}$

$0,5 \cdot 2 \cdot 1,5=(0,5+0,2) \cdot 2 \cdot v_{2\theta} \rightarrow v_{2\theta}=1,07\,m/sn$

$T_1+V_1=T_2+V_2 \qquad (V=V_e)$

$\frac{1}{2} m v_1^2+0=\frac{1}{2} m v_2^2+\frac{1}{2} k \cdot s_2^2$

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,5^2=\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v_2^2+\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0,2^2 \rightarrow v_2=1,36\,m/sn$

$v_2^2=v_{2r}^2+v_{2\theta}^2$

$1,36^2=v_{2r}^2+1,07^2 \rightarrow v_{2r}=0,838\,m/sn$