5- RİJİT CİSMİN DÜZLEMSEL KİNETİĞİNDE KUVVET VE İVME YÖNTEMİ

→ Cisimler belirli bir hacim ve şekle sahip olduğundan, farklı noktalara uygulanan bir kuvvet sistemi bir cismin hem ötelenmesine hem dönmesine neden olabilir. Hareketin ötelenme ile ilgili olan kısmı,

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a_G}$$

denklemiyle ve dönme ile ilgili olan kısmı,

$$\Sigma \vec{M_G} = I_G \vec{\alpha}$$

denklemiyle incelenir. Bir rijit cismin hareketini tam olarak tanımlamak için her iki durumu da gözden geçirmek gerekir.

Ötelenme hareketini temsil eden denklemde m terimi cismin kütlesidir ve cismin ötelenme hareketine direncini temsil eden skaler bir büyüklüktür.

Dönme hareketini temsil eden denklemde I terimi cismin kütlesel eylemsizlik momentidir ve cismin açısal harekete karşı direncini temsil eden skaler bir büyüklüktür.

Düzlemsel kinetiğin incelenmesinde, genellikle analiz için seçilen eksen cismin G kütle merkezinden geçer ve daima hareket düzlemine diktir. Bu eksene göre hesaplanacak eylemsizlik momenti I_G ile gösterilecektir.

→ Kütlesel eylemsizlik momenti

Cismin G kütle merkezinden geçen z eksenine göre eylemsizlik momenti,

$$I_z = \int_m r^2 dm$$

olarak tanımlanır. Daima pozitiftir ve birimi kg.m² 'dir.

Analiz için, sadece, bir eğrinin bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan yüzeylere sahip simetrik cisimler ele alınacak. Dönel hacmi z ekseni etrafında oluşturulan cisimleri ele alalım.

$$dm = \rho dV$$

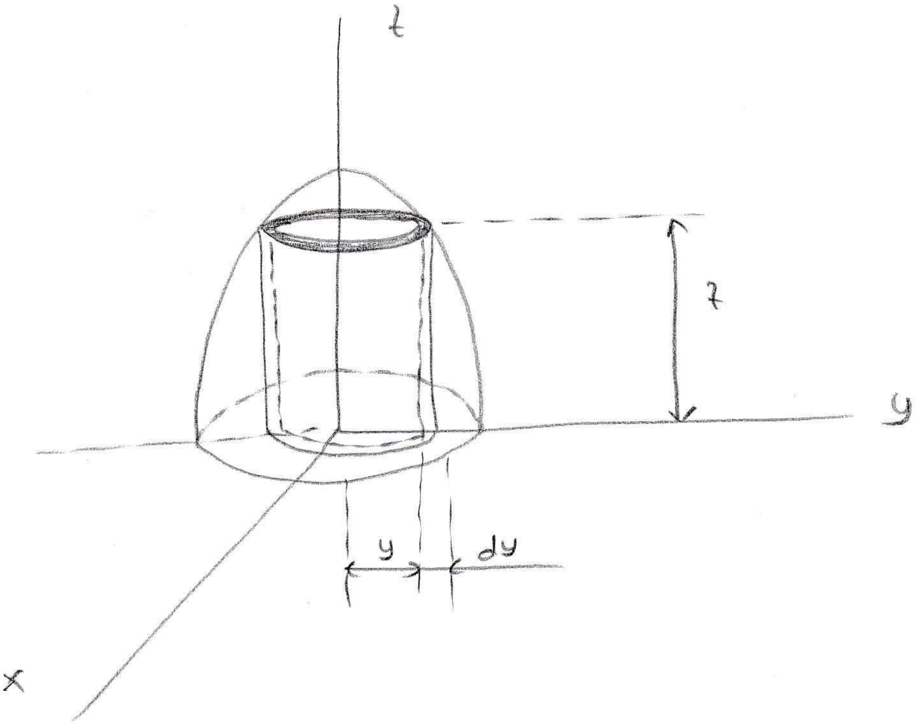
$$I_z = \int_V r^2 \rho dV \qquad (\rho = sbt \text{ alalım})$$

$$I_z = \rho \int_V r^2 dV \qquad (dV = dx\, dy\, dz)$$

$$I_z = \rho \int_V r^2 dx\, dy\, dz$$

İntegrasyon için seçilen hacim elemanı üç doğrultuda da sonsuz küçük boyutlara sahip, yani, $dV = dx\, dy\, dz$ ise cismin eylemsizlik momenti "üç katlı integral" kullanılarak hesaplanabilir. Ancak, integral işlemi, seçilen hacim elemanının sadece bir doğrultuda diferansiyel büyüklüğe veya kalınlığa sahip olması koşuluyla tek katlı bir integral işlemine indirgenebilir. Kabuk ve disk elemanları bu amaçla sıklıkla kullanılır.

→ Kabuk elemanı



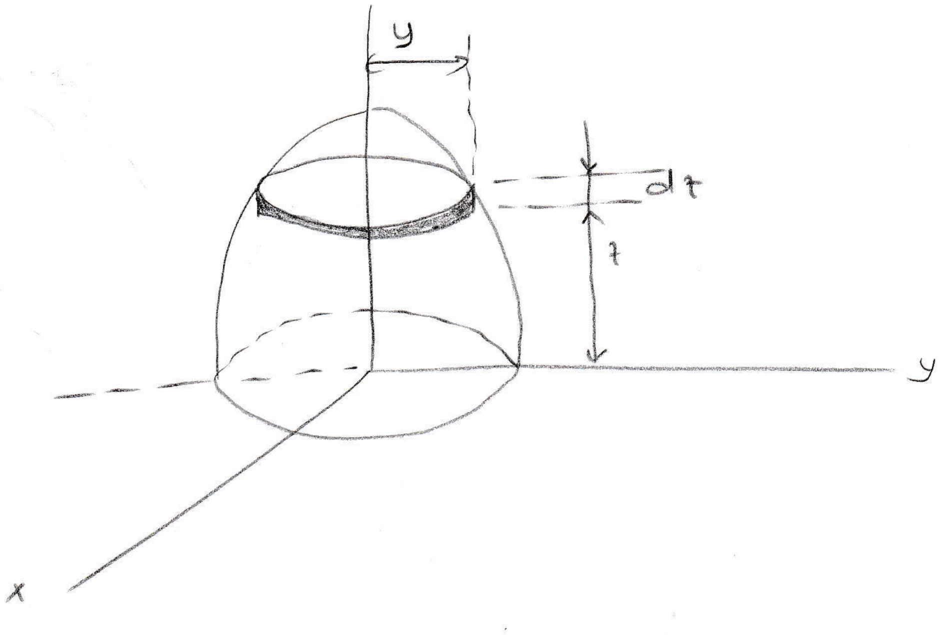
$dV = (2\pi y) \cdot z \cdot dy$

Burada kabuk eleman "inceliği" nedeniyle z ekseninden aynı $r = y$ dik uzaklığında bulunur. Bu nedenle

$$I_z = \rho \int r^2 dV$$

denklemi doğrudan kullanılabilir.

→ Disk elemanı



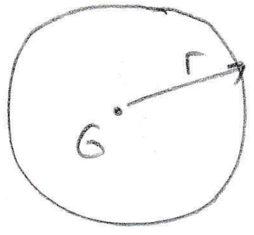
$dV = (\pi y^2)\, dz$

Burada hacim elemanı radyal doğrultuda sonludur ve dolayısıyla elemanın parçaları z ekseninden aynı r radyal uzaklığında yer almaz. Bu yüzden,

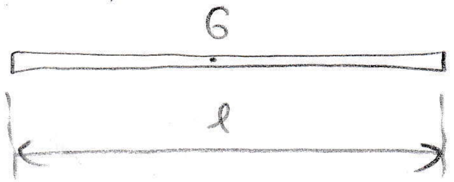
$$I_z = \rho \int r^2 dV$$

denklemi doğrudan kullanılamaz. Önce disk elemanının z-eksenine göre eylemsizlik momenti belirlenir ve daha sonra bu sonuç integre edilir.

→ Düzlemsel kinetik analizde kullanılan bazı homojen cisimlerin kütlesel eylemsizlik momenti



$I_G = \frac{1}{2} m r^2$



$I_G = \frac{1}{12} m l^2$

→ Paralel eksen teoremi

Cismin kütle merkezinden geçen bir eksene göre eylemsizlik momenti biliniyorsa, herhangi bir paralel eksene göre eylemsizlik momenti "paralel eksen teoremi" kullanılarak belirlenebilir.

$$I = I_G + md^2$$

Burada, I_G kütle merkezinden geçen bir eksene göre eylemsizlik momenti, m cismin kütlesi ve d paralel eksenler arasındaki uzaklıktır.

→ Eylemsizlik yarıçapı

Eylemsizlik yarıçapı; Bir cismin kendisi ile aynı eylemsizlik momentine ve aynı kütleye sahip sanal halkanın yarıçapına denir.

$$I_G = m \cdot k_G^2 \quad \text{veya} \quad k_G = \sqrt{\frac{I_G}{m}}$$

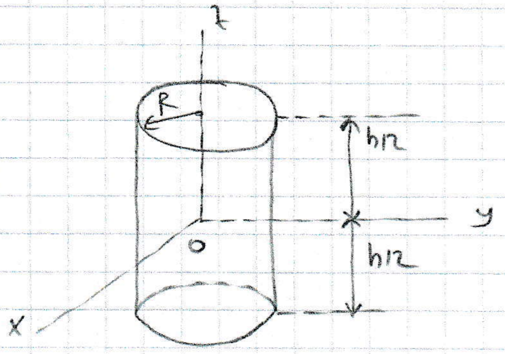
→ Bileşik cisimler

Bir cisim disk, küre ve çubuk gibi, bir takım basit şekillerden oluşuyorsa cismin herhangi bir z eksenine göre eylemsizlik momenti, bu şekillerin z eksenine göre eylemsizlik momentlerinin cebirsel toplamı alınarak belirlenebilir. Burada cebirsel toplam gerekçidir, çünkü bileşiğin bir parçası, bir plakadan çıkarılan "delik" örneğindeki gibi, başka bir kısmın parçası olarak hesaba katılmışsa, negatif bir büyüklük olarak düşünülmelidir.

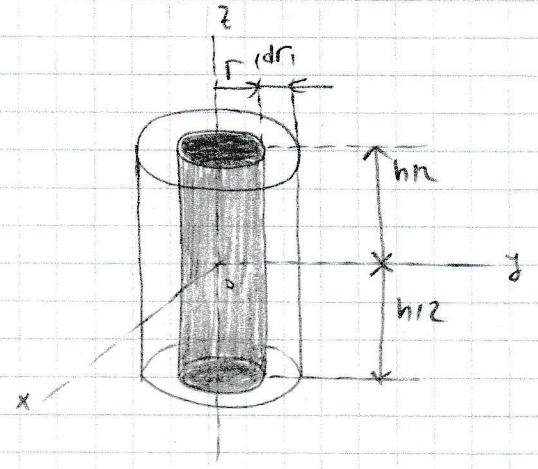
Her bir bileşik parçasının kütle merkezi z ekseni üzerinde değilse, hesaplamada paralel eksen teoremini kullanmak gerekir.

$$I = \Sigma (I_G + md^2)$$

1- Şekilde gösterilen silindirin z-eksenine göre eylemsizlik momentini belirleyiniz. Malzemenin ρ yoğunluğu sabittir.



Kabuk elemanı kullanarak hesaplayalım.



$$I = \int_m r^2 dm$$

$$dm = \rho dV = \rho \{2\pi r h dr\}$$

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 . \rho 2\pi r h dr = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = \rho 2\pi h \frac{r^4}{4} \Big]_0^R = \frac{\rho \pi}{2} R^4 h$$

Eylemsizlik momentini kütle cinsinden yazalım.

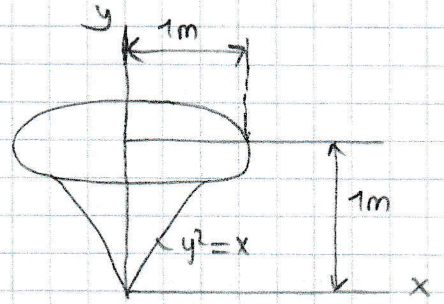
$$I = \frac{\rho \pi}{2} R^4 h$$

Silindirin kütlesi $\rightsquigarrow$ $m = \int_m dm = \int_0^R \rho 2\pi r h dr = \rho 2\pi h \int_0^R r dr = \rho 2\pi h \frac{r^2}{2} \Big]_0^R \rightsquigarrow$

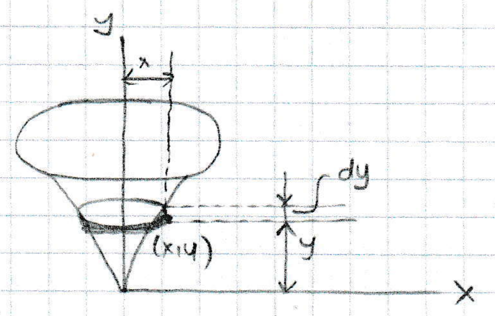
$$m = \rho \pi h R^2$$

$$I = \rho \pi h \frac{R^4}{2} = \rho \pi h R^2 . \frac{R^2}{2} = m \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

2- Şekildeki cisim, taralı alan y-ekseni etrafında döndürülerek oluşturulmuştur. Malzemenin yoğunluğu 5 Mg/m³ olduğuna göre, y-eksenine göre eylemsizlik momentini belirleyiniz.



Disk elemanı kullanalım.



$I=\int r^2 dm$

$dm=\rho\, dV=\rho\{\pi x^2 dy\}$

$I=\int r^2 dm \rightsquigarrow I=\int r^2 \rho\, dV \rightsquigarrow I=\rho\int r^2 dV \rightsquigarrow$ Ancak disk elemanında bu integrasyon bağıntısı doğrudan kullanılamıyor. Çünkü hacim elemanının parçaları y-ekseni boyunca aynı r radyal yakılığında yer almaz. Bu yüzden disk elemanı kullanarak eylemsizlik momentini hesaplamak için ilk önce disk elemanının eylemsizlik momentini belirlemek ve daha sonra bu sonucu eksen boyunca integre etmek gerekir.

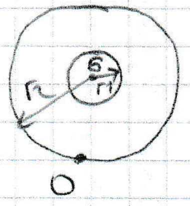
Disk elemanının eylemsizlik momenti olarak silindirin eylemsizlik momentini kullanabiliriz.

$I_y=\frac{1}{2}mR^2 \rightsquigarrow dI_y=\frac{1}{2}dm\, x^2 \rightsquigarrow dI_y=\frac{1}{2}\rho\, dV\, x^2 \rightsquigarrow dI_y=\frac{1}{2}\rho\pi x^2 dy\, x^2$

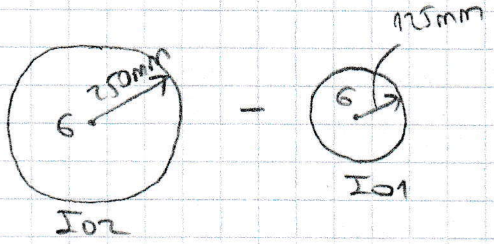
$\rightsquigarrow dI_y=\frac{1}{2}\rho\pi x^4 dy \rightsquigarrow dI_y=\frac{1}{2}\rho\pi (y^2)^4 dy \rightsquigarrow \int dI_y=\int_0^1 \frac{1}{2}\rho\pi y^8 dy \rightsquigarrow$

$I_y=\frac{1}{2}\rho\pi \frac{y^9}{9}\Big]_0^1 \rightsquigarrow I_y=\frac{\rho\pi}{18} \rightsquigarrow I_y=\frac{5\cdot 3{,}1416}{18} \rightsquigarrow I_y=0{,}873\ \mathrm{Mg.m^2}$

3- Şekilde gösterilen plağın, yoğunluğu 8000 kg/m³ ve kalınlığı 10 mm olduğuna göre, O noktasından geçen ve sayfa düzlemine dik olan eksene göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.



$r_1 = 125 \text{ mm}$
$r_2 = 250 \text{ mm}$
$h = 10 \text{ mm}$
$\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$
$I_z = ?$



Dairesel bir eleman için, $I_G = \frac{1}{2} m r^2$'dir. O'dan geçen eksene göre eylemsizlik momenti "paralel eksen teoremi" kullanılarak hesaplanabilir.

$$I_O = I_G + md^2$$

Plak, ortasında dairesel delik olan bir plaktır. O halde bileşik cisimdir. Buna göre,

$$I_O = I_{O2} - I_{O1}$$

şeklinde olmalıdır. İlk önce m'leri bulmalıyız.

$$m = \rho V \rightarrow m_1 = \rho_1 V_1 = \left(8000 \frac{kg}{m^3}\right) \cdot \left(\pi r_1^2 h\right) = 8000 \cdot \pi \cdot 0{,}125^2 \cdot 0{,}01 = 3{,}927 \text{ k}$$

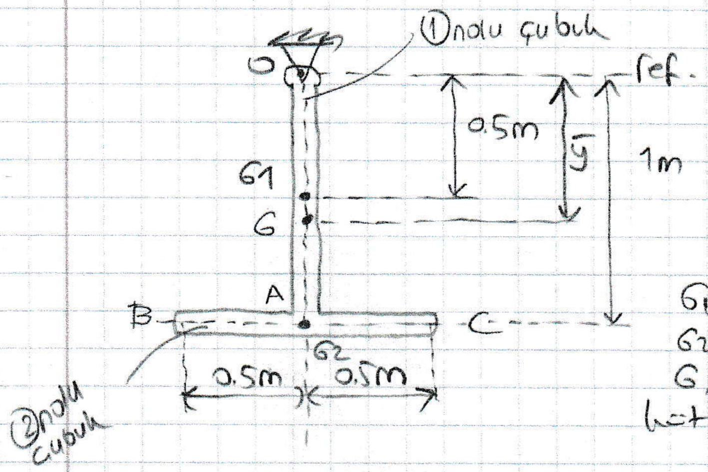
$$m_2 = \rho_2 V_2 = \left(8000 \text{ kg/m}^3\right) \cdot \left(\pi r_2^2 h\right) = 8000 \cdot \pi \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}01 = 15{,}708 \text{ kg}$$

$$I_{O1} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + m_1 d_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}927 \cdot 0{,}125^2 + 3{,}927 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}0307 + 0{,}245 = 0{,}276 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{O2} = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 + m_2 d_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 15{,}708 \cdot 0{,}25^2 + 15{,}708 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}4909 + 0{,}982 = 1{,}473 \text{ kg.m}^2$$

$$I_O = I_{O2} - I_{O1} = 1{,}473 - 0{,}276 = 1{,}197 \text{ kg.m}^2$$

4- Her biri 50 N ağırlığındaki iki ince çubuktan oluşan bir sarkaç, şekilde gösterildiği gibi O noktasından asılmıştır. Sarkacın, (a) O'daki pimden, (b) sarkacın G kütle merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.



$W_{OA} = 50N$
$W_{BC} = 50N$

$I_O = ?$
$I_G = ?$

G1, 1 nolu cismin,
G2, 2 nolu cismin,
G, bileşik cismin
kütle merkezidir.

Çubuk eleman için,

$I_G = \frac{1}{12} m\ell^2$ (G, kütle merkezi)

$I_O = \frac{1}{3} m\ell^2$ (O, dönme merkezi)

Bileşik cisim:

$I_G = I_{G1} + I_{G2}$

$I_O = I_{O1} + I_{O2}$

$I_O = I_G + md^2$

(a) $I_O = ?$ ↝ $I_O = I_{O1} + I_{O2}$

$$I_{O1} = \frac{1}{3} m_1 \ell_1^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{50}{9,81} \cdot 1^2 = 1,699 \text{ kg.m}^2$$

$$I_{O2} = \frac{1}{12} m_2 \ell_2^2 + m_2 d_2^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{50}{9,81} \cdot 1^2 + \frac{50}{9,81} \cdot 1^2 = 5,522 \text{ kg.m}^2$$

$$I_O = I_{O1} + I_{O2} = 1,699 + 5,522 = 7,22 \text{ kg.m}^2$$

(b) $I_G = ?$ I_G'yi hesaplamak için ilk olarak G'nin yerini belirlemeliyiz.

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} m}{\Sigma m} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0,5(50/9,81) + 1(50/9,81)}{\frac{50}{9,81} + \frac{50}{9,81}} = 0,75 \text{ m}$$

$$I_O = I_G + md^2 \leadsto I_G = I_O - md^2 \leadsto I_G = 7,22 - \left(\frac{50}{9,81} + \frac{50}{9,81}\right) \cdot 0,75^2 \leadsto$$

$$I_G = 7,22 - 5,734 \leadsto I_G = 1,486 \text{ kg.m}^2$$

→ Ötelenme hareketini temsil eden denklemler

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a_G}$$

$$\Sigma \vec{M_G} = 0$$

Skaler bileşenler cinsinden doğrusal ötelenme

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$

$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$

$\Sigma M_G = 0$ veya $\Sigma M_A = \Sigma(\mu_k)_A \curvearrowright \Sigma M_A = m.a_G.d$

Skaler bileşenler cinsinden eğrisel ötelenme

$$\Sigma F_n = m(a_G)_n$$

$$\Sigma F_t = m(a_G)_t$$

$\Sigma M_G = 0$ veya $\Sigma M_A = \Sigma(\mu_k)_A \curvearrowright \Sigma M_A = e.m.(a_G)_t - h.m.(a_G)_n$

Ötelenme hareketi, cismin kaymasıyla gerçekleşir. Dolayısıyla sürtünme kuvveti $F_d = \mu_k . N$ değerindedir.

→ Sabit bir noktadan geçen bir eksen etrafında dönme hareketini temsil eden denklemler

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a_G}$$

$\Sigma \vec{M_O} = I_O . \vec{\alpha}$ (O: dönme merkezi, G: kütle merkezi)

Skaler bilesenler cinsinden dönme

$O \neq G$ ise

$\Sigma F_n = m(a_G)_n = m\omega^2 r_G$

$\Sigma F_t = m(a_G)_t = m\alpha r_G$

$\Sigma M_O = I_O \alpha$ veya $\Sigma M_G = I_G \alpha$

$O = G$ ise

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma M_O = I_O \alpha$ veya $\Sigma M_G = I_G \alpha$

→ Genel düzlemsel hareketi temsil eden denklemler

$\Sigma \vec{F} = m \vec{a_G}$

$\Sigma \vec{M_G} = I_G \vec{\alpha}$

Skaler bilesenler cinsinden genel düzlemsel hareket

$\Sigma F_x = m(a_G)_x$

$\Sigma F_y = m(a_G)_y$

$\Sigma M_G = I_G \alpha$ veya $\Sigma M_A = \Sigma (\mu_k)_A$

Genel düzlemsel hareket problemlerinde ek bir denkleme daha gerek vardır. Problemin koşuluna göre uygun ek denklem seçilir.

1- Kayma yoksa kinematik geçerlidir.

$$a_G = \alpha r$$

2- Kayma varsa a_G ve α birbirinden bağımsızdır. Sürtünme kuvveti denklemi kullanılır.

$$F_d = \mu_k . N$$

3- Kayma olup olmadığı bilinmiyorsa kontrollü çözüm yapılır. İlk önce kayma olmadığı kabul edilir ve

$$a_G = \alpha r$$

ile çözüm elde edilir. Sonuç elde edildikten sonra varsayım kontrol edilir.

$$F_d \leq \mu_s . N$$

ise kayma olmaz ve varsayım doğrudur.

$$F_d > \mu_s . N$$

ise kayma olur ve varsayım yanlıştır. Tekrardan

$$F_d = \mu_k . N$$

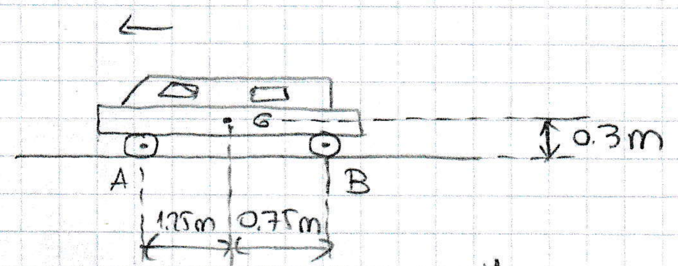
için çözüm yapılır.

→ Bağlı cisimler topluluğundan oluşan sistemlere ~~de~~ kuvvet ve ivme yöntemi uygulanırken her bir cisim için ~~ayrı~~ ayrı ayrı hareket denklemi oluşturulur.

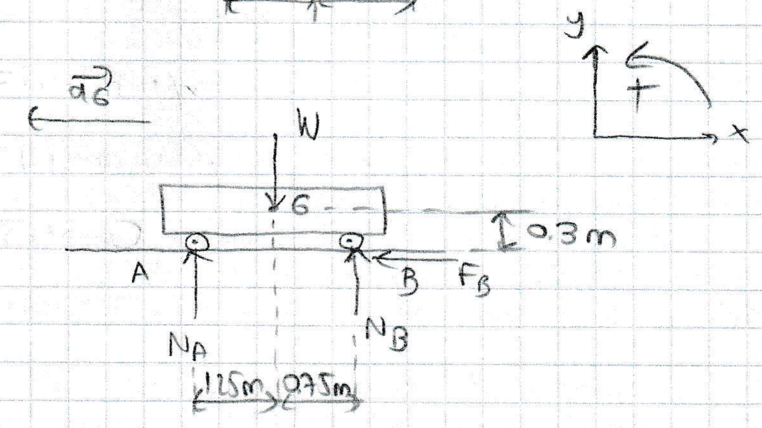
5- Şekilde gösterilen arabanın kütlesi 2 Mg'dır ve kütle merkezi G'dedir. Ön tekerlekler serbestçe dönebiliyorken, arkadaki "çekiş" tekerlekleri daima kaydığına göre, arabanın ivmesini belirleyiniz. Tekerleklerin kütlesini ihmal ediniz. Tekerlekler ve yol arasındaki kinetik sürtünme katsayısı $\mu_k = 0.25$'dir.

$m = 2\,Mg = 2000\,kg$
$\mu_k = 0.25$

$a = ?$



araba doğrusal ötelenme hareketi yapıyor.



Kayma varsa sürtünme kuvveti yenilmiş demektir.

Hareketle aynı yönde ortaya çıkar.

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x \quad \Rightarrow \quad -F_B = (2000).(-a_G)$

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y \quad \Rightarrow \quad N_A + N_B - W = 0$

$+\circlearrowleft \Sigma M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad -N_A . 1{,}25 + N_B . 0{,}75 - F_B . 0{,}3 = 0$

Elde ettiğimiz denklem sistemini çözelim.

$-F_B = -2000\,a_G \quad \Rightarrow \quad F_B = 2000\,a_G$

$N_A + N_B = 2000 . 9{,}81 \quad \Rightarrow \quad N_A + N_B = 19620$

$-N_A . 1{,}25 + N_B . 0{,}75 - F_B . 0{,}3 = 0$

$F_B, a_B, N_A, N_B \rightarrow$ dört bilinmeyen
İlave bir bağıntıya daha ihtiyacımız var $\Rightarrow F = \mu N$

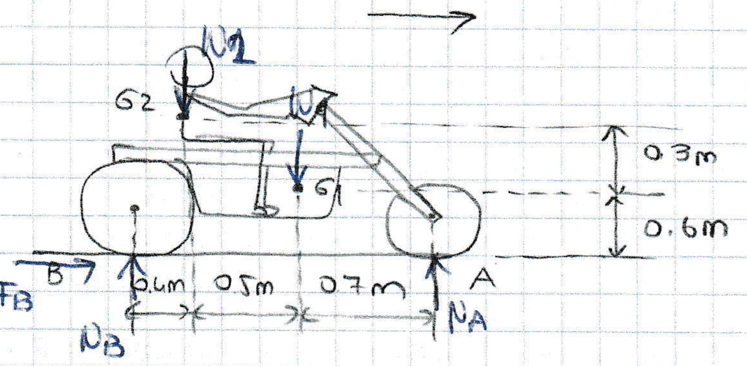
$F_B = \mu_k . N_B \quad \Rightarrow \quad F_B = 0{,}25\,N_B$

$a_G = 1.59\,m/s^2 \leftarrow$
$N_A = 6{,}88\,kN$
$N_B = 12{,}7\,kN$

$\Sigma M_G = 0$ yerine $\Sigma M_A = \Sigma (M_k)_A$ kinetik moment denklemini de kullanabilirdik.

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = \Sigma (M_k)_A \Rightarrow -W.1{,}25 + N_B . 2 = m a_G . 0{,}3 \Rightarrow -2000 . 9{,}81 . 1{,}25 + N_B . 2$
$= 2000 . a_G . 0{,}3 \quad \Rightarrow \quad -24525 + 2N_B = 600\,a_G$

6- Şekilde gösterilen motosiklet 125 kg'lık kütleye sahiptir ve kütle merkezi G1'dedir. Sürücünün kütlesi ise 75 kg'dır ve kütle merkezi G2'dedir. Tekerlekler ve asfalt arasındaki statik sürtünme katsayısı $\mu_s=0.8$ olduğuna göre, sürücünün ön tekerleği yerden kaldırmasının mümkün olup olmadığını belirleyiniz. Bunu yapmak için gerekli ivme nedir? Tekerleklerin kütlesini ihmal ediniz ve ön tekerleğin serbestçe dönebildiğini varsayınız.



$m_m = 125$ kg $= m_1$ $m_s = 75$ kg $= m_2$

$\mu_s = 0.8$ $a_G = ?$

Motosiklet ve sürücüyü tek bir sistem olarak düşünüyoruz. Burada sistemin kütle merkezinin konumu belirlenerek hareket denklemlerinin oluşturulması gerekir. Veya sistemi oluşturan her iki elemanın ayrı ayrı kütle merkezleri bilgisini kullanarak kinetik moment denklemi kullanılarak da çözülebilir. Çünkü bütün sistem a_G ivmesine sahip iken G1 ve G2'de a_G ivmesine sahiptir.

Ön tekerleği yerden kaldırmanın mümkün olup olmadığı soruluyor. Ön tekerlek yerden kaldırılırsa $N_A = 0$ olmalıdır. Ancak ön tekerlek yerden kaldırıldığında motosiklette kayma olmaması beklenir. Bu koşul,

$N_A=0$ iken sisteme etki edecek sürtünme kuvveti (F_B) (yenmesi gereken) $\leq$ $N_A=0$ iken sisteme etki edebilecek maksimum sürtünme kuvveti $(\mu_s N_B)$ (yenebileceği)

olduğunda sağlanır.

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m_T (a_G)_x$ $F_B = m_T a_G$

$+\uparrow \Sigma F_y = m_T (a_G)_y$ $N_B - W_1 - W_2 = 0$

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma (M_k)_B$ $-W_2 \cdot 0{,}4 - W_1 \cdot 0{,}9 = -m_1 \cdot a_G \cdot 0{,}6 - m_2 \cdot a_G \cdot 0{,}9$

($N_A=0$ için yazdık)

$F_B = (125+75) a_G \Rightarrow F_B = 200 a_G$

$N_B - 125 \cdot 9{,}81 - 75 \cdot 9{,}81 = 0 \Rightarrow N_B = 1962$

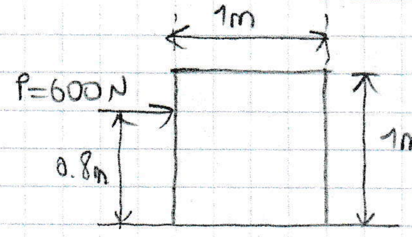
$-75 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}4 - 125 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}9 = -125 \cdot a_G \cdot 0{,}6 - 75 \cdot a_G \cdot 0{,}9 \Rightarrow a_G = 9{,}81 \text{ m/s}$

$F_B = 1962$ N

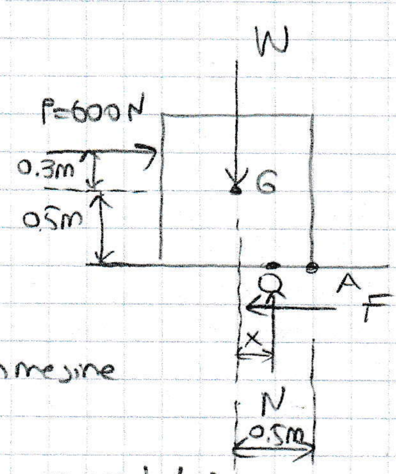
$F_{Bmaks} = \mu_s N_B = 0{,}8 \cdot 1962 = 1569{,}6$ N

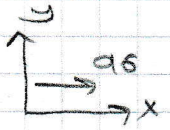
$N_A=0$ iken $(F_B = 1962) \leq (F_{Bmaks} = 1569{,}6)$ koşulunu sağlamadığı için sürücünün motosikletin ön tekerleğini yerden kaldırması mümkün değildir.

7- 50 kg'lık düzgün bir sandık, kinetik sürtünme katsayısı $\mu_k=0.2$ olan yatay bir yüzey üzerinde durmaktadır. Sandığa, şekilde gösterildiği gibi, P=600 N'luk bir kuvvet uygulandığına göre, ivmesini belirleyiniz.



$m=50\,kg$
$\mu_k=0.2$
$v_0=0$
$P=600\,N$
$a_G=?$





$W=50.9,81$
$W=490,5\,N$

P kuvveti sandığın kayarak ötelenmesine ya da devrilmesine neden olur.

Başlangıçta P kuvvetinin sandık üzerindeki etkisini bilmiyoruz. Bu nedenle ilk olarak sandığın kayarak ötelendiğini varsayalım. Sonra elden sonuca göre varsayımımızın doğru olup olmadığını kontrol edelim.

Kayarak ötelenen sandık için hareket denklemi;

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x \\ +\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y \\ +\circlearrowleft \Sigma M_G = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = m a_G \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_G = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 600 - F = 50 a_G \\ -W + N = 0 \\ -600.\,0,3 - F.\,0,5 + N.\,x = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 600 - F = 50 a_G \\ N = 490,5 \\ -180 - F.0,5 + 490,5x = 0 \end{array}\right\}$$

$F, a_G, x \rightarrow$ 3 bilinmeyen $\rightarrow$ 2 denklem $\rightarrow$ ilave bir denklem gerekiyor.

Varsayımdan yola çıkarak, $F = \mu_k N$

$$F = \mu_k N = 0,2 \,.\, 490,5 = 98,1\,N$$

$$600 - 98,1 = 50 a_G \Rightarrow a_G = 10,038\ m/sn^2$$

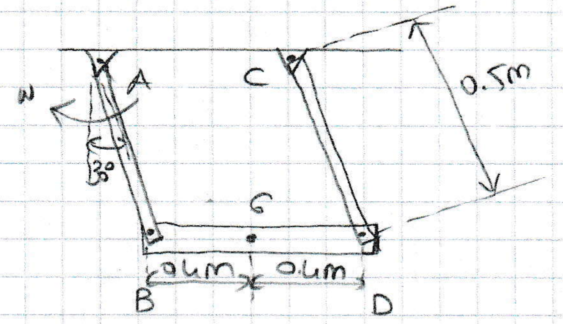
$$-180 - 98,1 . 0,5 + 490,5\,x = 0 \Rightarrow x = 0,467\,m$$

Burada $x = 0,467\,m$ elde edildi.

Şekil incelendiğinde, $x < 0.5$ olduğundan, sandık gerçekten başta varsayıldığı gibi kayarak ötelenir.

Çözüm $x > 0.5$ değerini verseydi, moment dengesi sağlanamayacağı için problem devrilme olacağı varsayımıyla yeniden ele alınacaktı. Bu halde, N kuvveti A köşe noktasına etki edecek ve $F \leq 0,2N_C$ olacaktı.

8- Şekilde gösterilen 100 kg'lık BD kirişi kütlesi ihmal edilebilir iki çubukla desteklenmektedir. Her iki çubuk $\theta = 30°$ olduğu anda $w = 6$ rad/sn açısal hızıyla dönmekte old. göre, her bir çubukta etki eden kuvveti belirleyiniz.



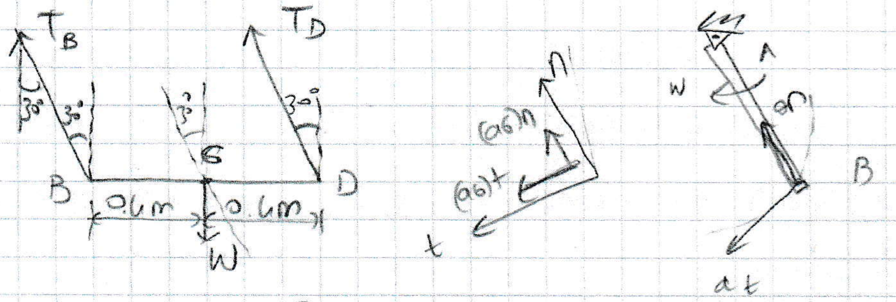
Çubuklar eşit uzunluklu oldukları için BD kirişinin hareketi eğrisel öteleme olur.

Çubukların uzunlukları farklı olsaydı BD kirişi açısal olarak da yer değiştireceği için hareketini genel düzlemsel hareket olarak tanımlamamız gerekirdi.

Eğrisel öteleme hareketinin hareket denklemleri

$\Sigma F_n = m(a_G)_n$
$\Sigma F_t = m(a_G)_t$
$\Sigma M_G = 0$ veya $\Sigma M_A = \Sigma(M_k)_A = e.m(a_G)_t - h.m(a_G)_n$

$m_{BD} = 100$ kg
$w_{AB} = 6$ rad/sn



BD kirişinin B ve D noktaları eğrisel yörünge boyunca hareket ederken BD kirişi öteleniyor. Dolayısıyla BD kirişinin bu şekildeki ötelenme hareketine eğrisel ötelenme denir.

Öteleme hareketinde cisim üzerindeki bütün noktalar aynı hıza sahiptir. O halde B veya D noktalarından birinin hareketini belirlediğimizde G kütle merkezinin hareketini de belirlemiş oluruz. AB ve CD çubuklarının her ikisi de aynı hıza sahip. O halde B ve D noktalarının da hızları aynı olacaktır. Bu da hareketin öteleme hareketi olduğunu doğrulamışdur.

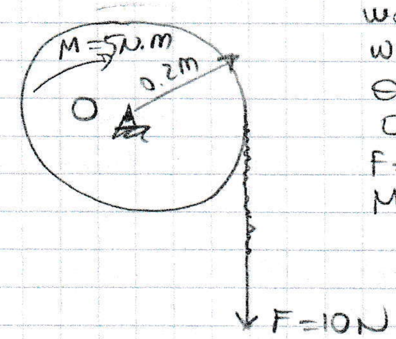
AB elemanı üzerinde B'nin normal ivmesini w'yı bildiğimiz için belirleyebiliriz.

$(a_B)_n = w_{AB}^2 r = 6^2 . 0{,}5 = 18 \text{ m/sn}^2$ ∧ $(a_B)_n = (a_G)_n = 18 \text{ m/sn}^2$

BD elemanını inceleyelim.

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_n = m(a_G)_n \\ \Sigma F_t = m(a_G)_t \\ \Sigma M_G = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} T_B + T_D - 981.\cos 30 = 100.18 \\ 981.\sin 30 = 100.(a_G)_t \\ -T_B.\cos 30.0{,}4 + T_D.\cos 30.0{,}4 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} T_B = T_D = 1{,}33 \text{ kN} \\ (a_G)_t = 4{,}9 \text{ m/sn}^2 \end{array}$$

9- Şekilde gösterilen 30 kg'lık disk, merkezinde mafsallanmıştır. Durağan halden harekete başladığına göre, diskin 20 rad/sn'lik bir açısal hıza ulaşması için gerekli devir sayısını belirleyiniz. Ayrıca, mafsaldaki tepkiler ne olur? Diske, çevresine sarılı ipe uygulanan sabit F=10N kuvveti ve sabit M=5 N.m momenti etkimektedir. Hesaplamada ipin kütlesini ihmal ediniz.



$m = 30\ kg$
$w_0 = 0$
$w = 20\ rad/sn$
$\theta = ?$
$O_x = ?\ O_y = ?$
$F = 10N$
$M = 5N.m$

Disk sbt. O noktası etrafında dönme hareketi yapıyor.

$O = G$

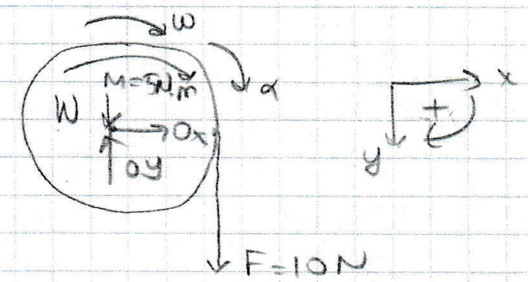
Öyleyse hareket denklemleri aşağıdaki gibidir.

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma M_G = I_G \alpha$

Cisim için SCD çizelim.



Disk saat yönlü bir açısal hıza sahip. α açısal ivmesinin yönünü de kuvvet ve momentin uygulanma biçiminden dolayı saat yönü varsayalım.

$$\left.\begin{aligned} &\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \\ &+\downarrow \Sigma F_y = 0 \\ &+\circlearrowright \Sigma M_G = I_G \alpha \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &O_x = 0 \\ &W - O_y + F = 0 \\ &+5 + 10 \cdot 0{,}2 = +I_G \alpha \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &O_x = 0 \\ &O_y = 10 + 30 \cdot 9{,}81 \Rightarrow O_y = 304{,}3N \\ &I_G \alpha = +7 \end{aligned}$$

$$I_G = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}6\ kg.m^2$$

$I_G \alpha = +7 \Rightarrow 0{,}6 \alpha = +7 \Rightarrow \alpha = 11{,}67\ rad/sn^2$ (Sonuç + çıktı. O halde α'nın yönü varsaydığımız gibi saat yönlüdür.)

Sabit ivmeli hareket için,

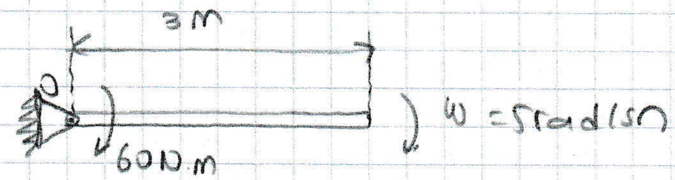
$w^2 = w_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

$20^2 = 0 + 2 \cdot 11{,}67\ \theta$

$400 = +23{,}34\theta \Rightarrow \theta = +17{,}14\ rad$

$$\theta = +17{,}14\ rad \cdot \frac{1\ dev}{2\pi\ rad} = +2{,}73\ dev$$

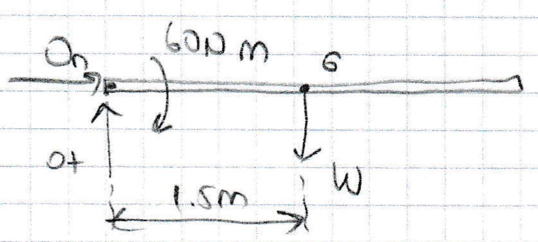
10- Şekilde gösterilen 20 kg'lık ince çubuk, düşey düzlemde dönmektedir ve gösterilen anda $\omega = 5$ rad/sn'lik açısal hıza sahiptir. Çubuğun bu andaki açısal ivmesini ve pimdeki tepkinin yatay ve düşey bileşenlerini belirleyiniz.



$m = 20$ kg
$\omega = 5$ rad/sn
$\alpha = ?$
$O_x = ?$
$O_y = ?$

Çubuk sabit O noktası etrafında dönme hareketi yapıyor ve $O \neq G$ O halde hareket denklemleri;

S.C.D.



$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = m a_n \qquad \Sigma F_n = m \omega^2 r_G$$
$$+\downarrow \Sigma F_t = m a_t \qquad \Sigma F_t = m \alpha r_G$$
$$+\circlearrowright \Sigma M_G = I_G \alpha \qquad \Sigma M_G = I_G \alpha$$

$$I_G = \frac{1}{12} m l^2 = \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 3^2 = 15 \text{ kg.m}^2$$

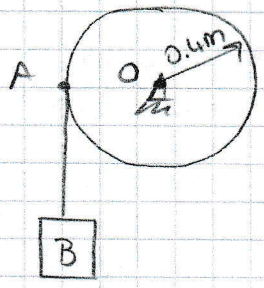
$$\Sigma F_n = m\omega^2 r_G \rightsquigarrow -O_n = 20 \cdot 5^2 \cdot 1{,}5 \rightsquigarrow O_n = -750 \text{ N}$$

$$\Sigma F_t = m\alpha r_G \rightsquigarrow -O_t + W = 20 \cdot \alpha \cdot 1{,}5 \rightsquigarrow -O_t + 20 \cdot 9{,}81 = 30\alpha \rightsquigarrow -O_t + 196{,}2 = \dots$$

$$\Sigma M_G = I_G \alpha \rightsquigarrow O_t \cdot 1{,}5 + 60 = 15 \cdot \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} -O_t + 196{,}2 = 30\alpha \\ O_t \cdot 1{,}5 + 60 = 15\alpha \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha = 5{,}9 \text{ rad/sn}^2 \\ O_t = 19 \text{ N} \end{array}$$

11- Şekilde gösterilen volan 60 kg'lık kütleye ve $k_O = 0.25$ m'lik eylemsizlik yarıçapına sahiptir. Kütlesi ihmal edilebilen bir ip volanın etrafına sarılmış ve 20 kg kütleli bir bloğa bağlanmıştır. Blok serbest bırakıldığına göre, volanın açısal ivmesini belirleyiniz.



$m_V = 60$ kg
$k_O = 0.25$ m
$m_B = 20$ kg
$v_{B0} = 0$
$\alpha = ?$

Volan sbt. O noktası etrafında dönme hareketi yapıyor.

$O = G$

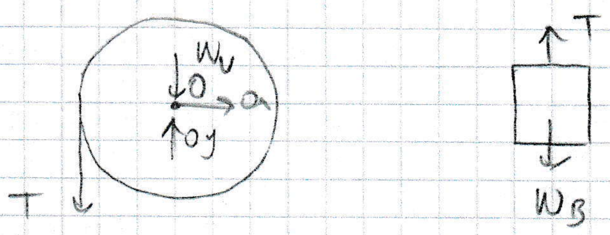
Volan (rijit cisim)

$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_G = I_G \alpha$

Blok (parçacık)

$\Sigma F_y = ma$

$$I_G = I_O = m_V k_O^2 = 60 \cdot 0{,}25^2 = 3{,}75 \ \text{kg.m}^2$$



Volan için hareket denklemleri;

$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = 0$	$-O_x = 0$	$O_x = 0$
$+\downarrow \Sigma F_y = 0$	$+T - O_y + W_V = 0$	$+T - O_y = 60 \cdot 9{,}81 \Rightarrow +T - O_y = 588{,}6$
$+\circlearrowleft \Sigma M_G = I_G \alpha$	$T \cdot 0{,}4 = 3{,}75\,\alpha$	$T = 9{,}375\,\alpha$

Blok için hareket denklemi;

$+\downarrow \Sigma F_y = m_B a$

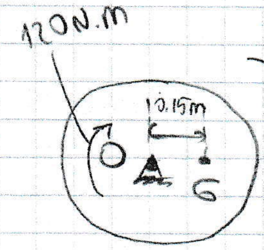
$-T + W_B = 20 \cdot a \Rightarrow -T + 20 \cdot 9{,}81 = 20a \Rightarrow -T + 196{,}2 = 20a$

T, O_y, α ve a olmak üzere 4 bilinmeyen ancak 3 denklem var. İlave bir bağıntıya ihtiyacımız var. Kinematikten yararlanırız.

$a = \alpha r \Rightarrow a_A = a_B = a \Rightarrow a = \alpha \cdot 0{,}4$

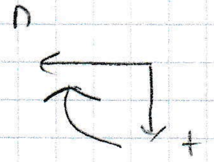
$+T - O_y = 588{,}6$	$T = 106$ N
$T = 9{,}375\,\alpha$	$a = 4{,}52$ m/sn²
$-T + 196{,}2 = 20a$	$\alpha = 11{,}3$ rad/sn²
$a = 0{,}4\,\alpha$	$O_y = 694{,}6$ N

12- Şekilde gösterilen 250 N'luk dengesiz volanın G kütle merkezinden geçen bir eksene göre eylemsizlik yarıçapı $k_G = 0.18$'dir. Volan gösterilen anda saat yönlü 8 rad/sn'lik bir açısal hıza sahip olduğuna göre, O mafsalındaki tepkinin yatay ve düşey bileşenlerini belirleyiniz.



$w = 8$ rad/sn ↻

$W = 250$ N
$k_G = 0.18$
$w = 8$ rad/sn ↻
$O_n = ?$
$O_t = ?$



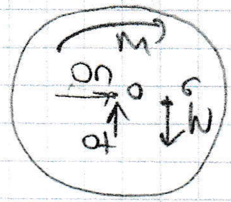
Volan sbt. O noktası etrafında dönme hareketi yapıyor ve $O \neq G$. O halde hareket denklemleri;

$M = 120$ N.m

$\leftarrow \Sigma F_n = m a_n \qquad \Sigma F_n = m w^2 r_G$

$\downarrow \Sigma F_t = m a_t \qquad \Sigma F_t = m \alpha r_G$

$\circlearrowright \Sigma M_G = I_G \alpha \qquad \Sigma M_G = I_G \alpha$



$-O_n = \frac{250}{9.81} 8^2 \, 0{,}15 \Rightarrow \quad O_n = -244{,}65$ N

$-O_t + W = \frac{250}{9{,}81} \cdot \alpha \cdot 0{,}15 \Rightarrow -O_t + 250 = 3{,}82\alpha \Rightarrow O_t = 250 - 3{,}82\alpha$

$I_G = m k_G^2 = \frac{250}{9.81} \cdot 0{,}18^2 = 0.83$ kg.m^2

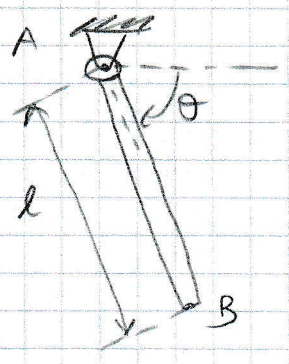
$\Sigma M_G = I_G \alpha \Rightarrow O_t \cdot 0{,}15 + 120 = 0{,}83 \cdot \alpha$

$O_t \cdot 0{,}15 + 120 = 0{,}83\alpha \Rightarrow (250 - 3{,}82\alpha) \cdot 0{,}15 + 120 = 0{,}83\alpha \Rightarrow$

$37{,}5 - 0{,}573\alpha + 120 = 0{,}83\alpha \Rightarrow 157{,}5 = 1{,}403\alpha \Rightarrow \alpha = 112{,}26$ rad/sn^2

$O_t = -178{,}8$ N

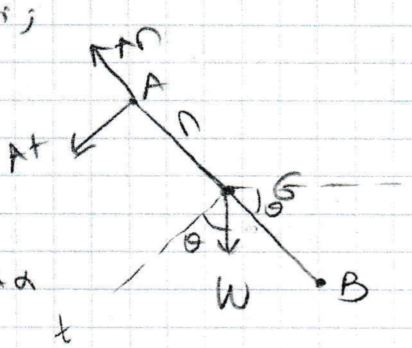
13- Sekilde gösterilen m kütleli l uzunluklu ince cubuk, $\theta=0°$ oldugu anda duragan halden serbest bırakılıyor. A'daki mafsalın, $\theta=90°$ oldugu anda cubuga uyguladıgı kuvvetin yatay ve düsey bilesenlerini belirleyiniz



$\theta=0° \rightarrow w_0=0$

$\theta=90° \rightarrow A_x=?\ A_y=?$

Cubuk sbt. A noktası etrafında dönme hareketi yapıyor ve $A \neq G$ O halde hareket denklemleri;



$\nwarrow \sum F_n = m a_n$

$\swarrow \sum F_t = m a_t$

$\circlearrowleft + \sum M_G = I_G \alpha$ veya $\sum M_A = I_A \alpha$

$\sum F_n = m w^2 r_G \rightarrow A_n - W \sin\theta = m w^2 \frac{l}{2}$

$\sum F_t = m \alpha r_G \rightarrow A_t + W \cos\theta = m \alpha \frac{l}{2}$

$\sum M_A = I_A \alpha \rightarrow W \cos\theta \frac{l}{2} = \frac{1}{3} m l^2 \alpha$

$A_n = mg \sin\theta + m w^2 \frac{l}{2}$

$A_t = -mg\cos\theta + m\alpha \frac{l}{2}$

$\alpha = g \cos\theta \frac{3}{2l}$

$\alpha = \alpha(\theta) \rightarrow \alpha$, konumun bir fonksiyonu. O halde degisken ivme.

$w\,dw = \alpha\, d\theta$

$\int w\,dw = \frac{3}{2}\frac{g}{l} \int_0^{90°} \cos\theta\, d\theta \rightarrow \frac{w^2}{2} = \frac{3}{2}\frac{g}{l} \sin 90 \rightarrow w^2 = 3 \cdot \frac{g}{l} \rightarrow w = \frac{5{,}42}{\sqrt{l}}$

$\theta = 90$ için $\rightarrow \alpha = g \cdot \cos 90 \cdot \frac{3}{2l} = 0$

$A_t = -mg\cos 90 + m\alpha \frac{l}{2} \rightarrow A_t = 0$

$A_n = mg \sin 90 + m \frac{5{,}42^2}{l} \cdot \frac{l}{2} \rightarrow A_n = mg + 14{,}69m \rightarrow A_n = 24{,}5m \rightarrow$

$A_n = 2{,}5mg$