4.10. Dönen Eksenlerle Mutlak ve Bağıl Hareket Analizi

→ Önceki kısımlarda hız ve ivmenin mutlak ve bağıl analizi ötelenen koordinat sistemi kullanılarak tanımlandı. Bu türden bir analiz, aynı rijit cisim üzerindeki noktaların hareketini veya mafsallarla bağlı rijit cisimler üzerinde yer alan noktaların hareketini belirlemede yararlıdır.

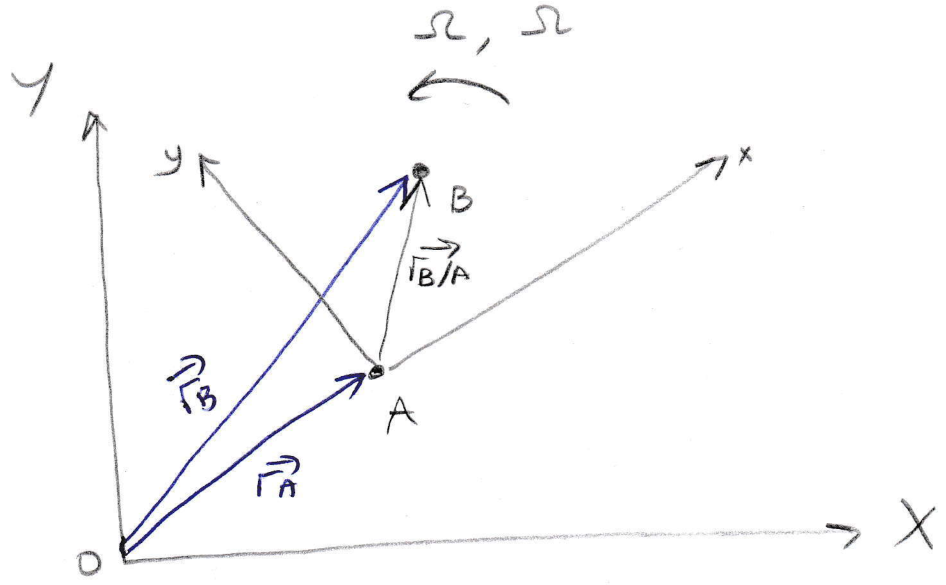
→ Ancak, bazı problemlerde en iyi kinematik analiz, hem ötelenen hem de dönen bir koordinat sistemi kullanılarak yapıldığında gerçekleşir.

1. Bağlantılarında kayma olacak şekilde bir araya getirilen bağlı cisimler topluluğunun kinematik analizi.

2. Bir düzenekte aynı rijit cisim üzerinde bulunmayan iki noktanın hareketinin analizi.

3. Parçacığın dönen bir yörünge boyunca hareketinin analizi.

→ Analizde, biri, düzlemde hem ötelenen hem dönen bir hareketli referans sisteminin orijini olan, iki noktanın hız ve ivmesini bağlayan iki denklem oluşturulacaktır. Denklemlerin genel hal için elde edilmesi nedeniyle, bu iki nokta ya birbirinden bağımsız olarak hareket eden iki parçacığı veya aynı (veya farklı) rijit cisimlerde bulunan iki noktayı gösterecektir.



→ <u>Konum:</u> A ve B noktalarının konumu X, Y, Z sabit koord. sisteminden ölçülen $\vec{r}_A$ ve $\vec{r}_B$ konum vektörleriyle belirlenir. B'nin A'ya göre konumu $\vec{r}_{B/A}$ bağıl konum vektörü ile belirlenir. $\vec{r}_{B/A}$ vektörü x, y, z hareketli koordinat sistemine göre ölçülür ve $\vec{r}_{B/A}$ vektörünün büyüklüğü her iki koordinat sisteminde de aynı olmasına karşın, bu vektörün doğrultusu, x,y eksenleri X,Y eksenlerine paralel değilse, iki sistemde farklı olarak ölçülür.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{r}_{B/A} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}$$

→ Belirli bir anda A noktası $\vec{v}_A$ hızına ve $\vec{a}_A$ ivmesine, x,y eksenleri ise, sırasıyla $\vec{\Omega}$ (omega) açısal hız ve $\dot{\vec{\Omega}} = d\vec{\Omega}/dt$ açısal ivmelerine sahiptir. Bu vektörlerin tümü $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ veya $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bileşenleri cinsinden ifade edilseler de X,Y,Z referans sisteminden ölçülür. Düzlemsel hareket için, sağ el kuralı ile, $\vec{\Omega}$ ve $\dot{\vec{\Omega}}$ hareketin referans düzlemine daima dik doğrultudadır, buna karşın $\vec{v}_A$ ve $\vec{a}_A$ bu düzlemdedir.

→ Hız: B noktasının hızı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}\right)$$

$$= \frac{dx_B}{dt}\vec{i} + x_B\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\vec{j} + y_B\frac{d\vec{j}}{dt}$$

$$= \left(\frac{dx_B}{dt}\vec{i} + \frac{dy_B}{dt}\vec{j}\right) + \left(x_B\frac{d\vec{i}}{dt} + y_B\frac{d\vec{j}}{dt}\right)$$

Burada $\frac{d\vec{i}}{dt}$ ve $\frac{d\vec{j}}{dt}$ türevleri aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$\frac{d\vec{i}}{dt} = \Omega\vec{j}$ ve $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$ olduğundan $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{i}$

$\frac{d\vec{j}}{dt} = -\Omega\vec{i}$ ve $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$ olduğundan $\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{j}$

Böylece $\frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}$ türevi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \left(\frac{dx_B}{dt}\vec{i} + \frac{dy_B}{dt}\vec{j}\right) + \left(x_B\frac{d\vec{i}}{dt} + y_B\frac{d\vec{j}}{dt}\right)$$

$$= \left(\vec{v}_{B/A}\right)_{xyz} + \vec{\Omega}\times\left(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}\right)$$

$$\frac{d\,\vec{r}_{B/A}}{dt} = (\vec{v}_{B/A})_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

Böylece B noktasının hızı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \frac{d\,\vec{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + (\vec{v}_{B/A})_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

İvme: B noktasının ivmesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \frac{d\,(\vec{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\Omega} \times \frac{d\,\vec{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\frac{d\,\vec{r}_{B/A}}{dt} = (\vec{v}_{B/A})_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{\Omega} \times \frac{d\,\vec{r}_{B/A}}{dt} = \vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A})$$

$$\frac{d\,(\vec{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \left(\frac{d(v_{B/A})_x}{dt}\,\vec{i} + \frac{d\,(v_{B/A})_y}{dt}\,\vec{j} \right) + \left((v_{B/A})_x \frac{d\vec{i}}{dt} + (v_{B/A})_y \frac{d\vec{j}}{dt} \right)$$

$$\frac{d\,(\vec{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = (\vec{a}_{B/A})_{xyz} + \vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz}$$

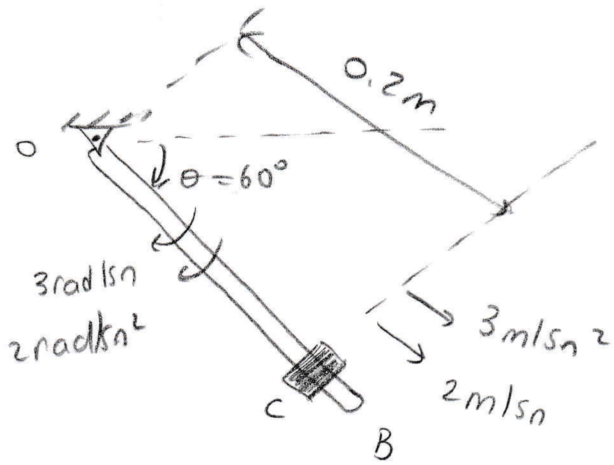
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_{xyz} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/A}) + 2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz}$$

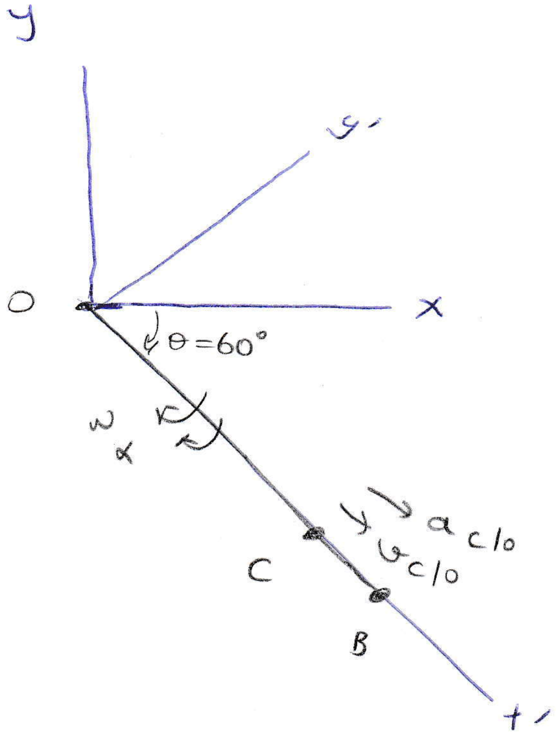
→ A ve B noktaları eğrisel yörüngeler boyunca hareket ediyorsa, $\vec{a}_B$, $\vec{a}_A$ ve $(\vec{a}_{B/A})_{xyz}$ ivmelerini, çoğu zaman, bunların normal ve teğetsel bileşenleri cinsinden ifade etmek uygundur.

→ B noktasının ivmesi ötelenen eksenlerle elde edilen tanımla karşılaştırıldığında, denklemler arasındaki farkın $2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz}$ ve $(\vec{a}_{B/A})_{xyz}$ terimleriyle ifade edilebileceği görülür. Burada $2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{B/A})_{xyz}$ terimine, bu terimi belirleyen ilk kişi olan fransız mühendis G. C. Coriolis'in adından, "Coriolis ivmesi" denir. Bu terim, B'nin dönmeyen ve dönen xyz eksenlerinden ölçülen ivmeleri arasındaki farkı gösterir. Vektörel çarpımla gösterildiği gibi, Coriolis ivmesi daima $\vec{\Omega}$ ve $(\vec{v}_{B/A})_{xyz}$'ye diktir.

→ Coriolis ivmesi, dönen referans sistemi kullanıldığında göz önüne alınması gereken, ivmenin önemli bir bileşenidir. Bu, örneğin, roketler, uzun menzilli mermiler veya dünyanın dönmesinden fazla etkilenen hareketler yapan cisimler üzerine etkiyen ivme ve kuvvetler incelenirken ortaya çıkar.

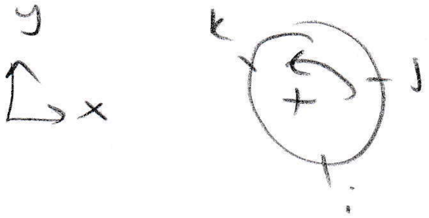
19- Şekildeki çubuk $\theta=60^\circ$ anında 3 rad/sn açısal hızına ve 2 rad/sn² açısal ivmesine sahiptir. Aynı anda, C bileziği, $x=0{,}2m$ olduğu anda, her ikisi de çubuğa göre ölçülen 2 m/sn'lik bir hıza ve 3 m/sn²'lik bir ivmeye sahip olacak şekilde çubuk boyunca dışa doğru hareket etmektedir. Bu anda Coriolis ivmesini, bileziğin hız ve ivmesini belirleyiniz.





OB sbt. O noktası etrafında dönme hareketi yaparken C noktası OB üzerinde ötelenme hareketi yapmakta. Dönen eksenlerle analiz uygundur.

$$\vec{v_C} = \vec{v_O} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{C/O} + \vec{v}_{C/O}$$



$$\vec{v_C} = \vec{v_C}$$

$$\vec{v_O} = 0$$

$$\vec{\omega} = -3\vec{k}$$

$$\vec{r}_{C/O} = 0{,}2\,\vec{i}$$

$$\vec{v}_{C/O} = 2\vec{i}$$

$$\vec{v_c} = 0 - 3\vec{k} \times \{0{,}2\vec{i}\} + 2\vec{i}$$

$$\vec{v_c} = -0{,}6\vec{j} + 2\vec{i}$$

$$v_c = 2\vec{i} - 0.6\vec{j}$$

$$\vec{a_c} = \vec{a_o} + \vec{\alpha} \times \vec{r_{c/o}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_{c/o}}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v_{c/o}} + \vec{a_{c/o}}$$

$$\vec{a_c} = \vec{a_c}$$

$$\vec{a_o} = 0$$

$$\vec{\alpha} = -2\vec{k}$$

$$\vec{r_{c/o}} = 0{,}2\vec{i}$$

$$\vec{\omega} = -3\vec{k}$$

$$\vec{v_{c/o}} = 2\vec{i}$$

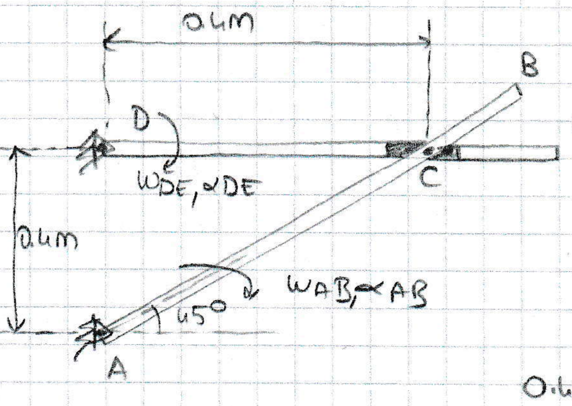
$$\vec{a_{c/o}} = 3\vec{i}$$

$$\vec{a_c} = 0 - 2\vec{k} \times \{0{,}2\vec{i}\} - 3\vec{k} \times (-3\vec{k} \times (0{,}2\vec{i})) + 2 \cdot 3\vec{k} \times 2\vec{i} + 3\vec{i}$$

$$\vec{a_c} = -0{,}4\vec{j} - 1{,}8\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{i}$$

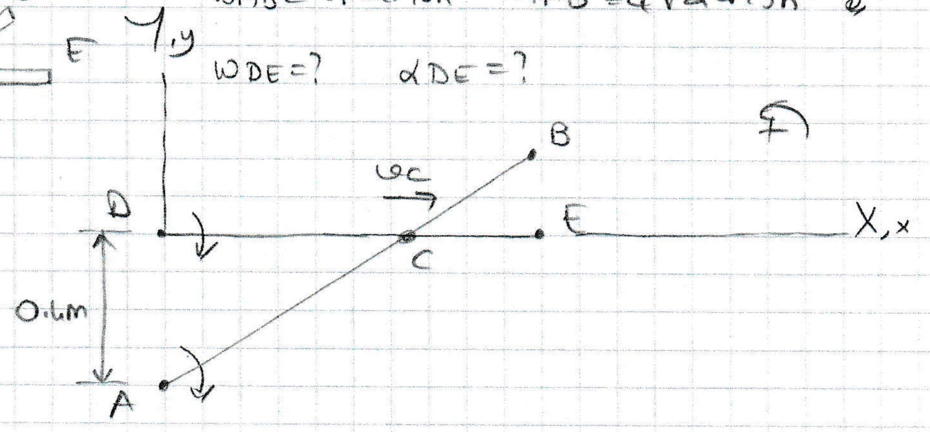
$$\vec{a_c} = 1{,}2\vec{i} - 12{,}4\vec{j}$$

58- Şekilde gösterilen AB çubuğu, $\theta = 45°$ anında $w_{AB} = 2$ rad/sn'lik bir açısal hız ve $\alpha_{AB} = 4$ rad/sn² lik bir açısal ivmeye sahip olacak şekilde saat yönünde dönmektedir. DE çubuğunun bu andaki açısal hareketini belirleyiniz. C'deki bileşik AB'ye mafsallanmıştır ve DE çubuğu üzerinde kaymaktadır.



$w_{AB} = 2$ rad/sn $\quad \alpha_{AB} = 4$ rad/sn²

$w_{DE} = ? \quad \alpha_{DE} = ?$



$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{C/D} + (\vec{v}_{C/D})_{xyz}$

$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{C/D} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{C/D}) + 2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{C/D})_{xyz} + (\vec{a}_{C/D})_{xyz}$

$\vec{v}_D = 0 \qquad \vec{a}_D = 0$

$\vec{r}_{C/D} = 0.4\vec{i}$

$(\vec{v}_{C/D})_{xyz} = (v_{C/D})_{xyz}\,\vec{i}$

$(\vec{a}_{C/D})_{xyz} = (a_{C/D})_{xyz}\,\vec{i}$

$\vec{\Omega} = -w_{DE}\vec{k} \qquad \dot{\vec{\Omega}} = -\alpha_{DE}\vec{k}$

$\vec{v}_C = 0 + w_{DE}\vec{k} \times (0.4\vec{i}) + (v_{C/D})_{xyz}\,\vec{i}$ (CD elemanı üzerinde)

$\vec{v}_C = \vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{C/A}$ (AB elemanı üzerinde)

$\vec{a}_C = \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{C/A} - w^2\,\vec{r}_{C/A}$ (AB elemanı üzerinde)

$\vec{r}_{C/A} = 0.4\vec{i} + 0.4\vec{j} \qquad \vec{w}_{AB} = -2\vec{k} \qquad \vec{\alpha}_{AB} = -4\vec{k}$

$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{C/D} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{C/D}) + 2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{C/D})_{xyz} + (\vec{a}_{C/D})_{xyz}$

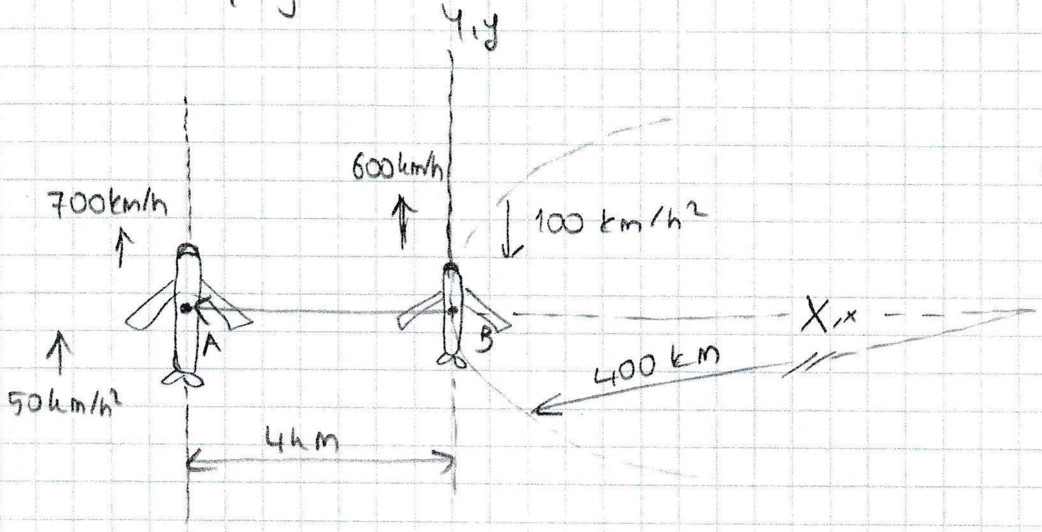
$(v_{C/D})_{xyz} = 0.8$ m/sn

$w_{DE} = 2$ rad/sn

$(a_{C/D})_{xyz} = 1.6$ m/sn²

$\alpha_{DE} = 0$

59. A ve B uçakları aynı yükseklikte uçmakta ve şekilde gösterilen hareketleri yapmaktadır. A'nın, B'nin pilotu tarafından ölçülen hız ve ivmesini belirleyiniz.



$(\vec{v}_{A/B})_{xyz} = ?$

$(\vec{a}_{A/B})_{xyz} = ?$

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/B} + (\vec{v}_{A/B})_{xyz}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/B}) + 2\vec{\Omega} \times (\vec{v}_{A/B})_{xyz} + (\vec{a}_{A/B})_{xyz}$

$\vec{v}_B = 600\vec{j}$ km/saat

$\vec{a}_B = \vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt} = 900\vec{i} - 100\vec{j}$ km/saat²

$a_{Bn} = \dfrac{v_B^2}{\rho} = \dfrac{600^2}{400} = 900$ km/saat²

$v_B = w r_{B/O} \rightsquigarrow v_B = \Omega \rho \rightsquigarrow \Omega = \dfrac{v_B}{\rho} = \dfrac{600}{400} = 1{,}5$ rad/saat

$\vec{\Omega} = -1{,}5\vec{k}$

$a_{Bt} = \alpha r \rightsquigarrow a_{Bt} = \dot{\Omega} \rho \rightsquigarrow \dot{\Omega} = \dfrac{a_{Bt}}{\rho} = \dfrac{100}{400} = 0{,}25$ rad/saat²

$\dot{\vec{\Omega}} = 0{,}25\vec{k}$

$\vec{r}_{A/B} = -4\vec{i}$ km

$\vec{v}_A = 700\vec{j}$ $\quad \vec{a}_A = 50\vec{j}$

$(\vec{v}_{A/B})_{xyz} = 94\vec{j}$ km/saat

$(\vec{a}_{A/B})_{xyz} = (-1190\vec{i} + 151\vec{j})$ km/saat²