

Bir cismin içindeki bir A noktasındaki gerilmeden bahsedebilmek için A noktasından geçen bir yüzeye yüzeyinin verilmesi gerekir. A noktasındaki eğilme gerilme vektörü normal ve kayma gerilmeleri diye iki bileşene ayrılır. Eğilme gerilme vektörü yüzey normali ile çakılırsa bu durumdaki kayma gerilmesi sıfır olur, ve normal gerilmeye ASAL GERİLME denir.

A noktasından geçen üç düzlemlindeki gerilme vektörleri belli ise A noktasından geçen herhangi bir düzlemlindeki gerilme vektörü bulunabilir. Verilen üç vektörel büyüklüğe yeni bir büyüklük gözü ile bakılır ve A noktasında gerilmeden değil gerilme halinden bahsedilir. Bu büyüklüğe GERİLME TANSÖRÜ denir.

A noktasından geçen bütün yüzey elemanlarında gerilme vektörlerinin doğrultusu sabit kalıyorsa A^* dağı gerilme haline TEK EKS. GERİLME HALİ denir. Eğer gerilme vektörleri bir düzlem içinde iseler İKİ EKS. GERİLME HALİ denir. Gerilme vektörlerinin doğrultularında bir özellik yok ise ÜÇ EKS. GERİLME HALİ denir.

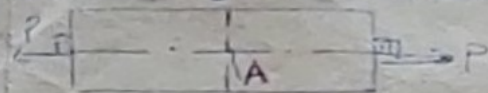
Bir eksenli gerilme halinde bir yüzey elemanındaki, iki eksenli gerilme halinde ise iki yüzey elemanındaki gerilme vektörlerinin verilmesi ile A noktasındaki gerilme hali tamamen belirlenebilir.

Koordinat eksenleri ile aynı yönde olan gerilmeleri altına aynı doğrultuda olduğu eksenin indisi olarak kullandık. τ_x, τ_y, τ_z gibi.

Kayma gerilmelerde iki indisi kullandık. $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}$

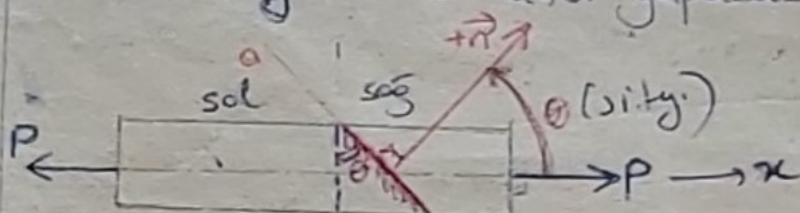
τ_{xy}
Bulunduğu
eğilim normali Doğrultusu

Tek eksenli Gerilme hali. Bir A noktasından geçen bütün yüzey elemanlarında, gerilme vektörlerinin doğrultusu sabit kalıyorsa A noktasındaki gerilme haline TEK EKS. GERİLME denir.

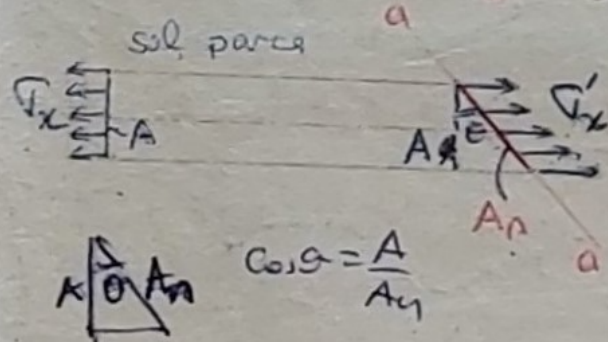


$P \leftarrow \boxed{A} \xrightarrow{\sigma_x} P \quad \rightarrow \sum F_x = 0 : -P + \sigma_x \cdot A = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{P}{A}}$

Şimdi cubuğu eksenliyle s.i.t.y.'de θ açısı yapan (a-a) düzlemiyle keselim. Bir düzlem dış normali ile belirleneceğine göre bu düzlemin dış normali olan $\vec{n}$ de yatay x eksenine ile s.i.t.y.'de θ açı yapacaktır.



soldaki parçanın dengesini yazalım:



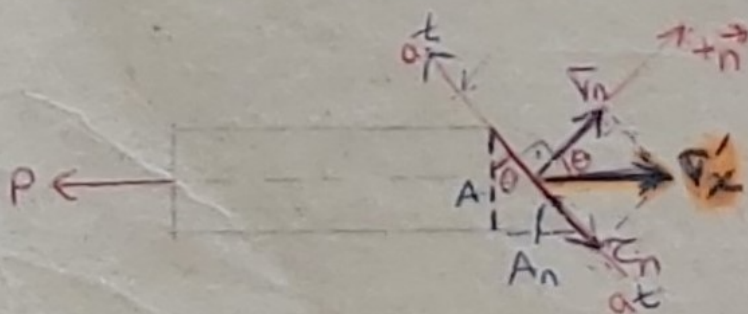
$$\rightarrow \sum F_x = 0 :$$

$$-P + \sigma'_x \cdot A_n = 0 \Rightarrow \sigma'_x = \frac{P}{A_n}$$

$$\frac{A}{A_n} = \cos \theta \text{ dir.}$$

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos \theta \dots (1)$$

σ'_x nü biri eğik kesitin dış normal yönünde, diğeri ise bu kesitin düzlemi içinde iki bileşene ayıralım.



$$\sigma_n = \sigma'_x \cos \theta = (\sigma_x \cos \theta) \cos \theta$$

$$\tau_n = \sigma'_x \sin \theta = (\sigma_x \cos \theta) \sin \theta$$

(1) den: $\sigma_n = (\sigma_x \cos \theta) \cos \theta$
 $\tau_n = (\sigma_x \cos \theta) \sin \theta$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \theta \\ \tau_n &= \sigma_x \cos \theta \sin \theta \end{aligned}}$$

elde edilir.

bu deni cinsinden deęerlerini bulmak isterseniz:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

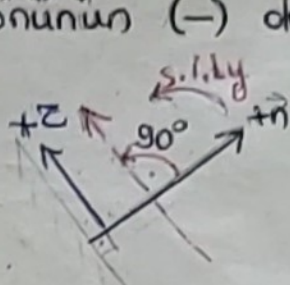
$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

Bzdeslikleri kullanarak

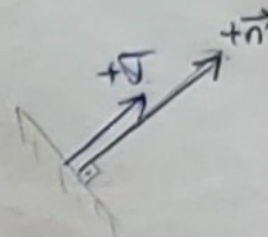
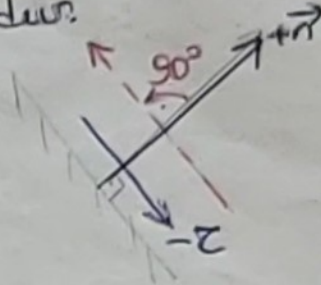
$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad (1)$$

$$\tau_n = + \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta \quad (2)$$

(2) deki (-) işaretinin nedeni; řekildeki kayma gerilmesinin yönünün (-) deęudur.



Kayma gerilmesinin işareti



Normal gerilmenin işareti

(1) ve (2) ile verilen gerilmelerin max ve mini değerleri de:

(1) deni: $\frac{d\sigma_n}{d\theta} = 0$ yarasalı

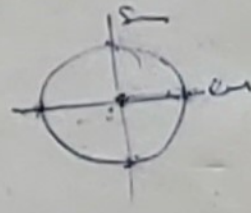
$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta) \Rightarrow \frac{d\sigma_n}{d\theta} = -\sigma_x \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 90^\circ$$

$$\sigma_n|_{\theta_1=0^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 0^\circ) = \sigma_x$$

$$\sigma_n|_{\theta_2=90^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 180^\circ) = 0$$

$$\theta_1 = 0^\circ \Rightarrow \sigma_n = \sigma_{\max} = \sigma_x = \sigma_1$$

$$\theta_2 = 90^\circ \Rightarrow \sigma_n = \sigma_{\min} = 0 = \sigma_2$$



Normal gerilmenin max ve mini olarak bulunduğu bu düzlemlerde kayma gerilmesinin ne değer aldığını bulmak için θ_1 ve θ_2 değerlerini, (2) de yerine yazarsak her iki değer için:

$$\tau_n = - \frac{\sigma_x}{2} \sin 0^\circ = 0$$

$$\tau_n = - \frac{\sigma_x}{2} \sin 180^\circ = 0$$

$$\tau_n = 0$$

bulunur.

Normal gerilmenin max ve mini olduğu düzlemlerde kayma gerilmesi yoktur.

Normal gerilmenin bu kısıt altında oluşan max. ve mini. (3) gerilerine ASAL GERİLMELER denir ve

$$\left. \begin{aligned} (\theta_1=0^\circ) \sigma_{\max} &= \sigma_1 \\ (\theta_2=90^\circ) \sigma_{\min} &= \sigma_2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ASAL} \\ \text{GERİLMELER} \end{array}, \tau=0$$

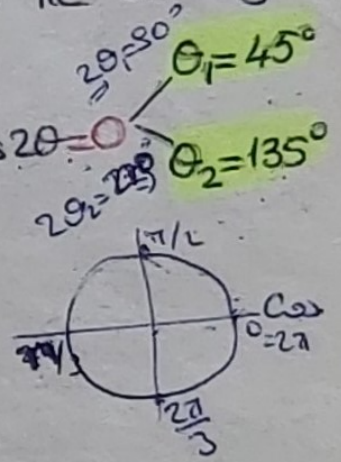
ile gösterilir. Yani, Asal gerilmelerin bulunduğu düzlemlerde kayma gerilmesi sıfırdır. ($\tau=0$)

Bu durumun tersinin de geçerli olup olmadığını araştıralım. Önce kayma gerilmesinin max. ve mini. değerleri ile bu değerlere ulaştığı düzlemleri bulalım.

$$(2) \text{ den: } \tau_n = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta \Rightarrow \frac{d\tau_n}{d\theta} = -\sigma_x \cos 2\theta = 0$$

$$\theta_1 = 45^\circ \Rightarrow \tau_n = \tau_{\min} = -\frac{\sigma_x}{2}$$

$$\theta_2 = 135^\circ \Rightarrow \tau_n = \tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

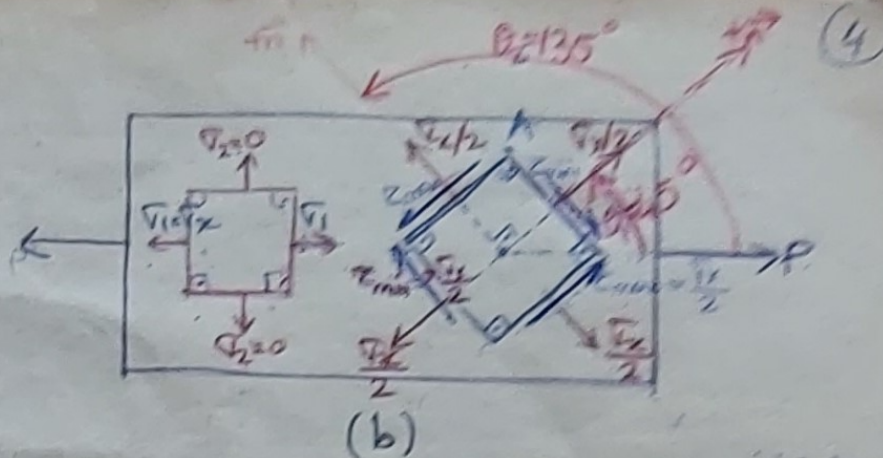
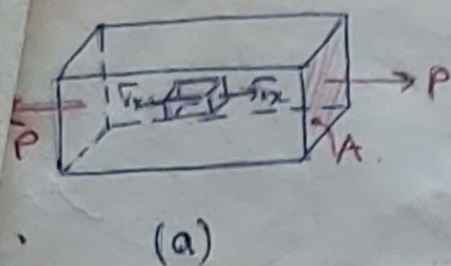


Kayma gerilmesinin mini ve max olduğu bu düzlemlerde normal gerilmenin ne değer alacağını bulmak için θ_1 ve θ_2 açılarını (1) de yerine yazalım.

$$\theta_1 = 45^\circ \text{ için: } \sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 90^\circ) = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\theta_2 = 135^\circ \text{ için: } \sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 270^\circ) = \frac{\sigma_x}{2}$$

elde edilir. Bu sonuçlar bize kayma gerilmesinin max. ve mini olduğu düzlemlerde normal gerilmenin sıfır olmayıp tüm düzlemlerde eşit değer aldığını gösterir.



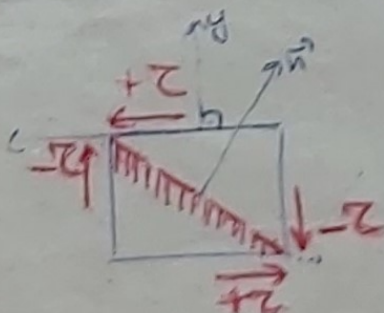
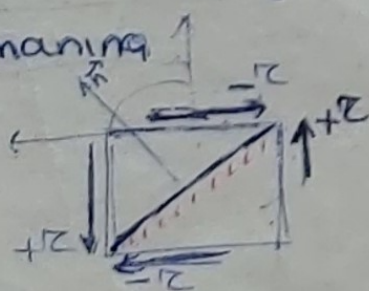
(b) nolu şekilde; $\sigma_{\min}$ nin işaretinin negatif olduğu ok yönüyle gösterildiği için $\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x}{2}$ 'de ayrıca önüne (-) işareti konmamıştır.

$\sigma_1 = \sigma_x = \sigma_{\max}$
 $\sigma_2 = 0 = \sigma_{\min}$ değerleri bulunan bu yüzleri cubuğun yüzlerine paraleldir. Bu elemanda: $\sigma_{\min}$ ve $\frac{\sigma_x}{2}$ normal

gerilme değeri vardır. Bu döndürülmüş elemanın yüzleri doğal olarak birbirlerine olan dikliklerini korur.

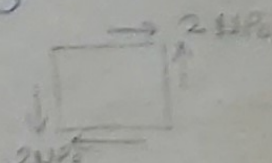
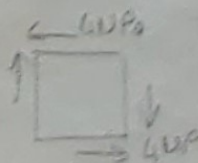
$\theta_2 = 135^\circ$ yüzünde: $\sigma_{\max}$, $\frac{\sigma_x}{2}$ gerilmeleri vardır.

Normal gerilme, bir elemanın sadece birbirine paralel bir çift yüzünde bulunabilmesine karşın, kayma gerilmesi, dengeyi sağlanması açısından elemanın en az birbirine karşı iki çift yüzünde bulunur. Şiddetçe eşit işaretçe ters olan bu gerilmeler düzlemde gösterilen gerilme elemanına



şeklinde etkir. Bu halleri BASİT KAYMA HALLERİ denir.

Sayısal değerlerle verilen problemlerde $-\tau$ değeri gerilme hali üstünde sadece şiddet olarak yazılıp (-) işareti ok yönü ile belirtilir. Örneğin:



Her defasında Σ 'ların ok uçlarının elemanın bir köşesinin uç noktalarında birleştiğine dikkat edilmelidir.

Kayma gerilmelerinin bu durumu (2) denkleminde $\theta = \theta_1 = 45^\circ$ ve $\theta = \theta_2 = 90^\circ + 45^\circ$ konularak elde edilen değerlerle uyum içindedir.

Aynı değerleri (1) de yerine yazdığımızda:

$$\sigma_{n1} = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad , \quad \sigma_{n2} = \frac{\sigma_x}{2} [1 + \cos 2(\theta + 90^\circ)]$$

$\cos 90^\circ = 0$ $\cos 180^\circ = -1$

$$\sigma_{n1} = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\sigma_{n2} = \frac{\sigma_x}{2} (1 - \cos 2\theta) = \frac{\sigma_x}{2} \text{ bulunur.}$$

$\cos 0^\circ = 1$ $\cos 270^\circ = 0$

Buradan: $\sigma_{n1} + \sigma_{n2} = \sigma_x = \sigma_1 + \sigma_2$ elde edilir. A

Bu sonuç işe; birbirine dik iki yüzdeki normal gerilmelerin toplamının bir değişmez (invariant) olduğunu ve asal gerilmeler toplamına eşit olduğunu gösterir.

MOHR GERİLME DAİRESİ:

Söz konusu kesitlerin her biri üzerindeki normal ve kayma gerilme çifti, $(\sigma - \tau)$ eksen takımında bir noktaya karşılık gelir. Bu noktaların tümünün geometrik yeri işe Mohr Gerilme Dairesi adını alır. Dairenin denklemini de (1) ve (2) formülleri kullanılarak elde edilir.

$$(1) \text{ den } \Rightarrow \sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta \Rightarrow \left(\sigma_n - \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta \right)^2$$

$$(2) \text{ den } \Rightarrow \tau_n = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta \Rightarrow \tau_n^2 = \left(-\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta \right)^2$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2} \right)^2 \quad \dots (3)$$

$x^2 + y^2 = R^2$

(3) ifadesi Merkezi $M\left(\frac{\sigma_x}{2}, 0\right)$ ve yarıçapı $R = \frac{\sigma_x}{2}$ olan bir daire gösterir.

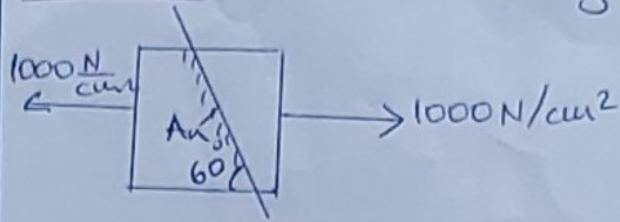
Çizim yoluyla Mohr Dairesini elde etmek için:

- 1) Yatay eksene normal gerilmeler, düşey eksene kayma gerilmeleri işaretlenir.
- 2) Bir ölçek belirlenerek verilen gerilme elemanının birbirine dik iki yüzünden her birindeki gerilme çifti belirlenen ölçekle (σ - τ) eksen takımına yerleştirilir.
- 3) Böylece daire üzerinde, aralarında 180° lik bir merkez açısı bulunan iki nokta elde edilir.
- 4) Bu noktaları birleştiren doğru parçası dairenin çapı, bu doğru parçasının yatay σ eksenini kestiği nokta ise dairenin merkezidir.
- 5) Mohr gerilme dairesi çizildikten sonra, gerilme elemanının düşey sağ yüzü ile aralarında θ kadar bir açı bulunan yüze Mohr Dairesi üzerinde karşılık gelen nokta şöyle bulunur: Eleman üzerinde sağ düşey yüzden bu aranan yüze hangi yönden dönülerek gelinmişse (s.i.y. de mi? yoksa s.it.y. de mi?), Mohr dairesinde buna ters yönden merkez etrafında 2θ kadar dönülür.

Böylece saptanan noktanın koordinatları istenen yüzde etkiyen normal ve kayma gerilmelerini verir.

TEK EKSENLİ GERİLME ÖRNEKLERİ

ÖRNEK: 1) Şekilde verilen gerilme elemanında; Mohr D. çizel



- $\nabla u = ?$ $Z_u = ?$
- $\nabla_{1,2} = ?$ ve düzlemleri = ?
- $Z_{u_{\max}} = ?$ ve düzlemleri $u_{\min}$
- Bulduğunuz değerleri formüllerle doğrulayınız.

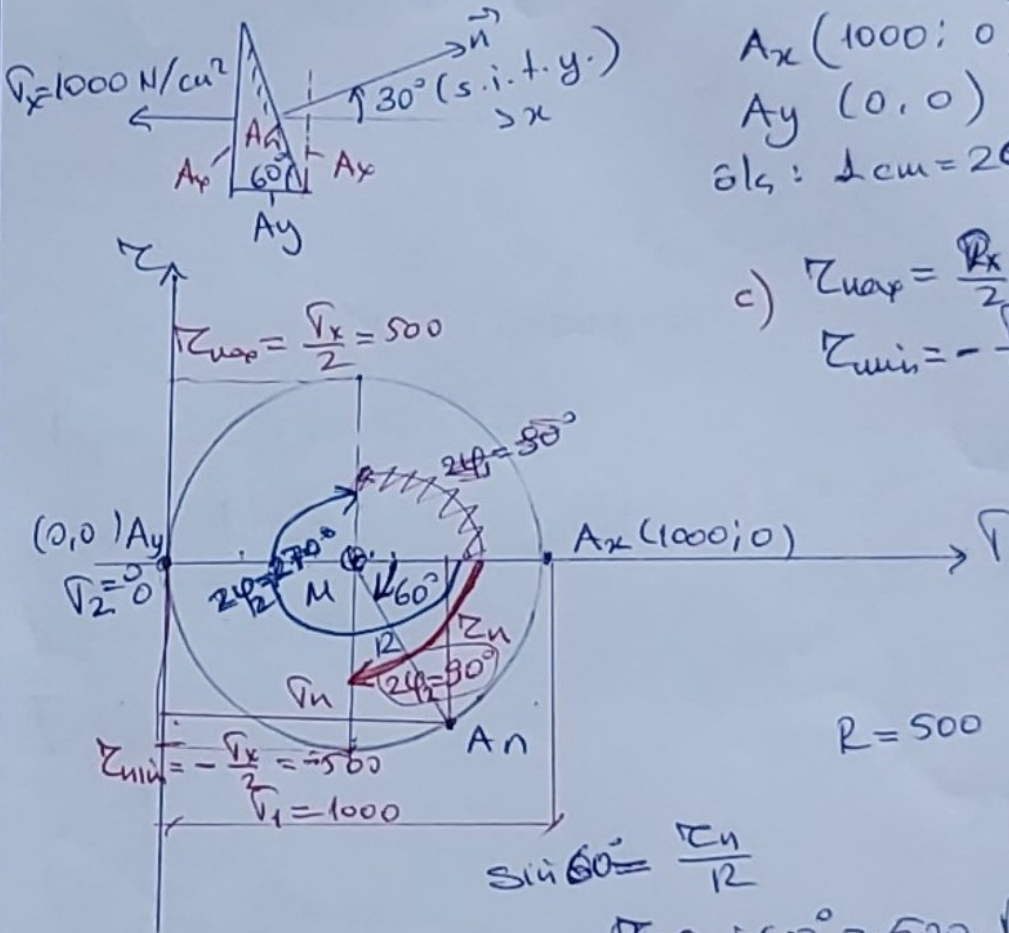
$$A_X(1000; 0)$$

$A_y (0,0)$

Sl₄: $\Delta c_m = 200 \text{ N/cm}^2$

c) $Z_{\max} = \frac{R_x}{2} = 500 \text{ H/cm}^2$, $2\phi = 270^\circ$
 $Z_{\min} = -\frac{R_x}{2} = -500 \text{ H/cm}^2$, $2\phi = -90^\circ$

$$Z_{min} = -$$



$$\sin 60^\circ = \frac{r_n}{12}$$

a) Mohr's Circle:
 $\tau_n = R \sin 60^\circ = 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tau_n = -433 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$
 $\sigma_n = R \cos 60^\circ = 500 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma_n = 250 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$

$$\sigma_n = R + R \cos 60^\circ = 500 + 500\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\sigma_n = 750 \text{ N/cm}^2}$$

Hesap yolu ile (formülle)

Herapjolu ile (formülle)

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta) = \frac{1000}{2} (1 + \cos 60^\circ) = 750 \text{ N/cm}^2$$
$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} (1 - \cos 2\theta) = -433 \text{ N/cm}^2$$

$$Z_n = -\frac{V_k}{2} \sin 2\theta = -\frac{1000}{2} \sin 60^\circ =$$

b) Mohr'sche Kreise: $\tau_1 = \tau_x = 1000 \text{ N/cm}^2$ (Drehmoment, $A_x, \theta_1 = 0^\circ$)
 $\tau_2 = 0$ (" $A_y, \theta_2 = 90^\circ$)
 $\tau_3 = 0$ (" $A_y, \theta_3 = 180^\circ$)

Formüller $\left. \begin{matrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \end{matrix} \right|_{\theta=0^\circ} = \frac{1000}{2} (1 + \frac{\cos 0^\circ}{1}) = 1000 = \sqrt{1}$
 $\left. \sqrt{2} \right|_{\theta=90^\circ} = \frac{1000}{2} (1 + \frac{\cos 180^\circ}{-1}) = 0$