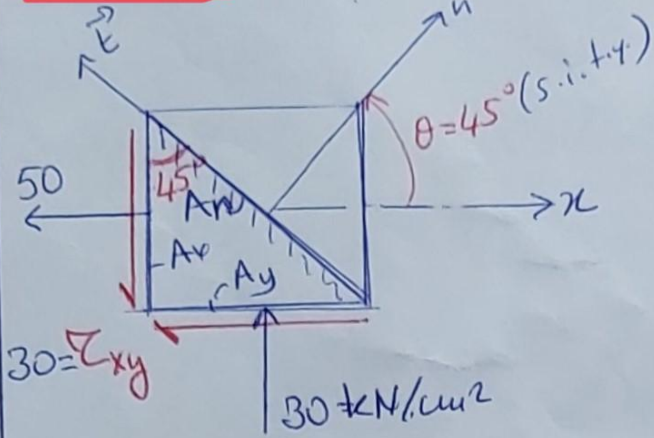
ÖRNEK :



Şekildeki gerilme elemanı için

a) $\sigma_n = ?$ $\tau_n = ?$

b) $\sigma_{1,2} = ?$ ve düzlemleri $= ?$ 〃 $= ?$

c) $\tau_{\substack{max \\ min}} = ?$ ve

d) A_n'e dik düzlemin gerilmeleri $= ?$

ÇÖZÜM :

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-30)}{2}$$

$$\boxed{\sigma' = 10 \text{ kN/cm}^2}$$

$A_x(\sigma_x, \tau_{xy}) = A_x(50 ; 30)$

$A_y(-\sigma_y ; -\tau_{xy}) = A_y(-30 ; -30)$

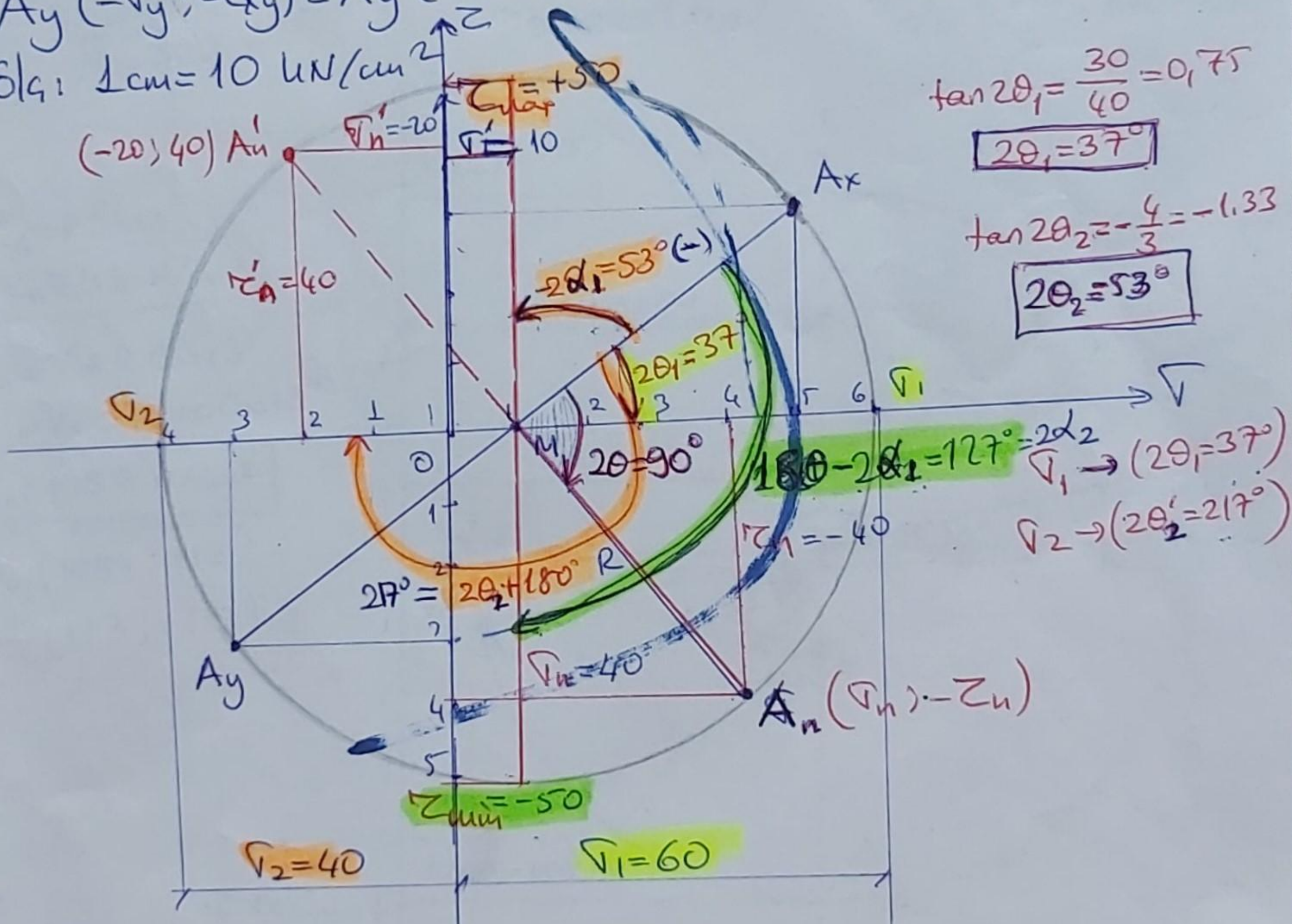
ölç: 1 cm = 10 kN/cm²

$\tan 2\theta_1 = \frac{30}{40} = 0{,}75$

$\boxed{2\theta_1 = 37°}$

$\tan 2\theta_2 = -\frac{4}{3} = -1{,}33$

$\boxed{2\theta_2 = 53°}$



$2\alpha_1 = 53° \Rightarrow \tau_{max}$

$2\alpha_2 = 180° - \underbrace{53°}_{2\alpha_1} \Rightarrow 2\alpha_2 = 127° \ (\tau_{min})$

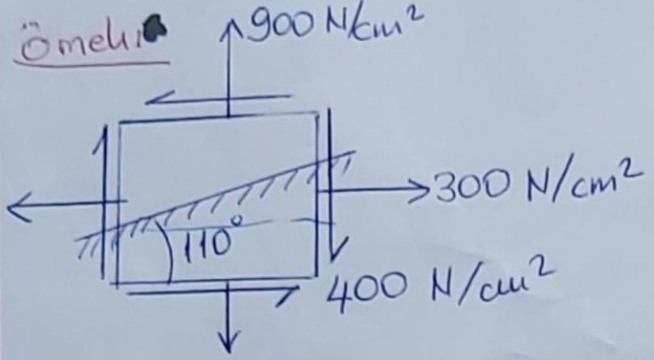
$A_n \perp A'_n$

$(40 ; -40) \perp (-20 ; +40)$

$\sigma_{n_1} + \sigma_{n_2} = \sigma_1 + \sigma_2$

$40 + \sigma_{n_2} = 60 - 40 \Rightarrow \boxed{\sigma_{n_2} = -20}$

Örnek:



Mohr Dairesini çiziniz:

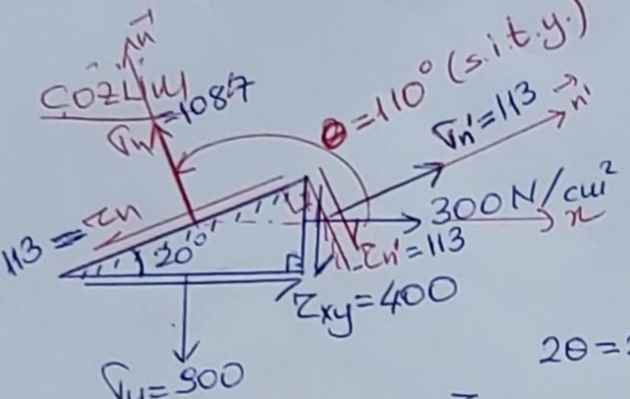
a) Taralı düzlemin gerilmelerini bulunuz

b) $\sigma_{1,2} = ?$ ve düzlemleri $= ?$

c) $\tau_{max / mini} = ?$ " " $= ?$

d) $A_n \perp A_{n'}(\sigma_{n'}; \tau_n) = ?$

Çözüm:



$A_x(300; -400)$

$A_y(900; +400)$

ölç: 1 cm = 100 N/cm²

$2\theta = 220°$ (siy)

$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 600$ N/cm²

$\tau_n = R\sin 13°$

$\boxed{\tau_n \cong 113 \text{ N/cm}^2}$

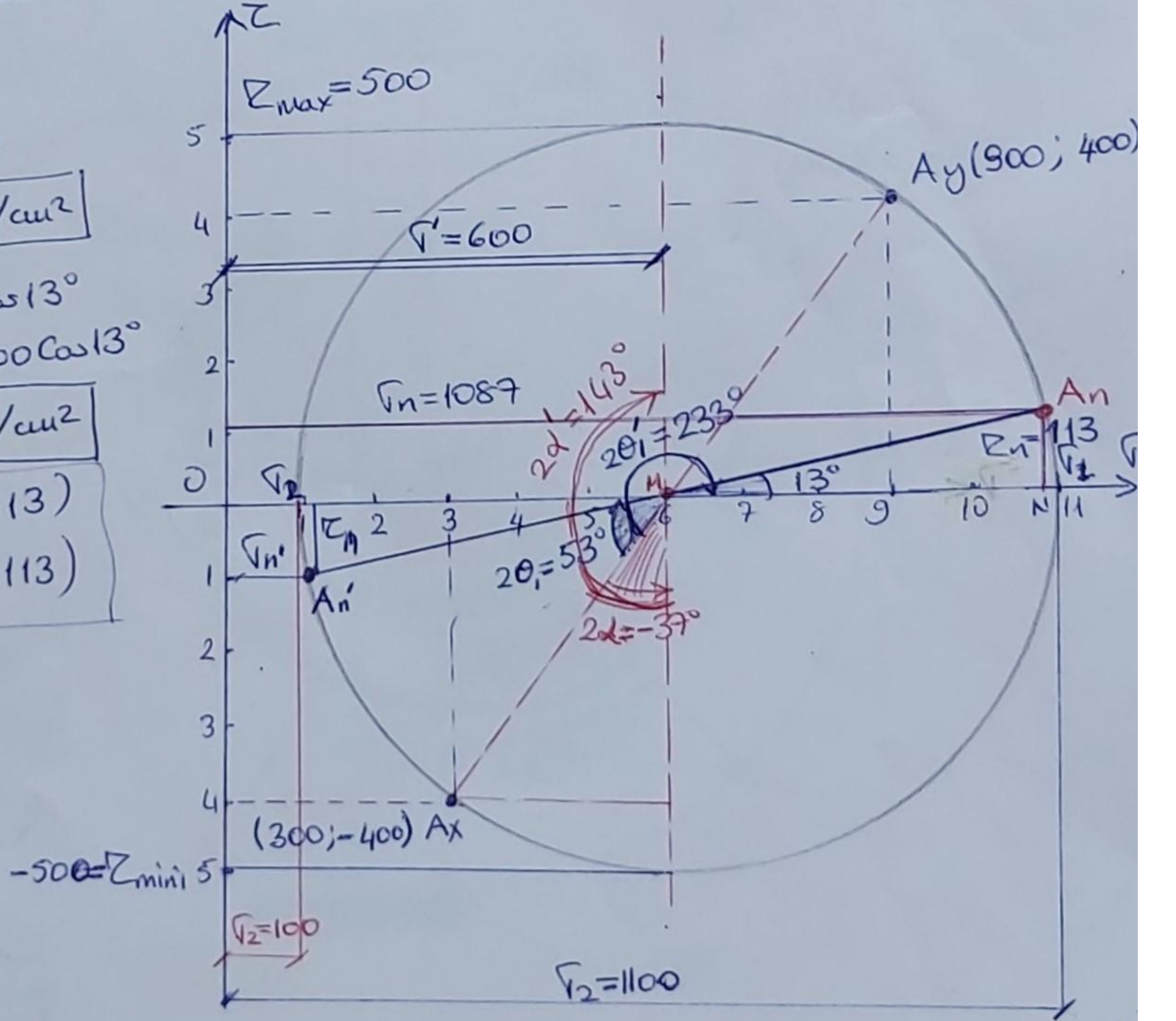
$\sigma_n = \sigma' + R\cos 13°$

$= 600 + 500\cos 13°$

$\boxed{\sigma_n \cong 1087 \text{ N/cm}^2}$

$A_n(1087; 113)$

$A_{n'}(113; -113)$



$\tan 2\theta_1 = \frac{4}{3} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(-400)}{300-900} = \frac{800}{600} = \frac{4}{3} \Rightarrow (2\theta_1 = +53° \rightarrow \sigma_2 = 100$ N/cm²

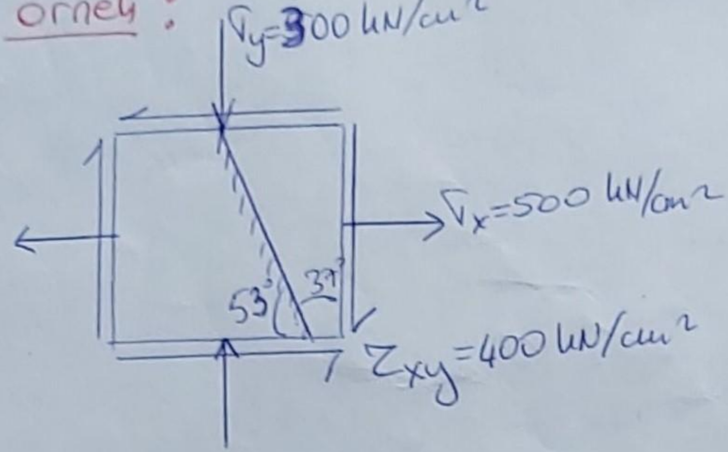
$2\theta_1' = 180 + 53 = 233°$

$(2\theta_1' = 233° \rightarrow \sigma_2 = 1100$ N/cm²

$\tan 2\alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow 2\alpha = -37°: (2\alpha = -37° \rightarrow \tau_{mini} = -500)$

$2\alpha' = 180 - 37° = 143°: (2\alpha' = 143° \rightarrow \tau_{max} = 500)$

örnek :



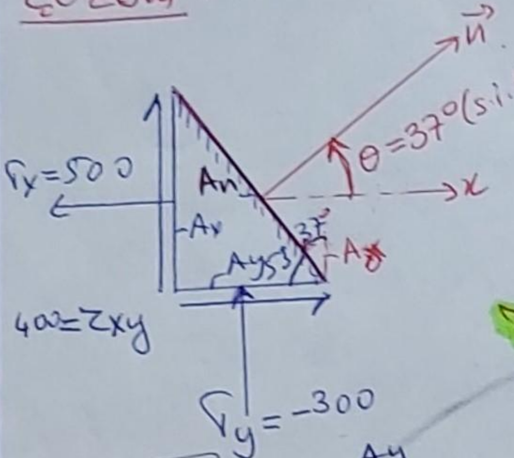
Gerilme hali verilen elemen için MOHR DAİRESİ'ni çizerek;

a) $\sigma_n = ?$ $\tau_n = ?$

b) $\sigma_{1,2}$ ve düzl. = ?

c) $\tau_{max/min}$ ve " bulunuz

çözüm :



$A_x(500; -400)$

$A_y(-300; +400)$

ölç: $1cm = 100\ kN/cm^2$

$\sigma' = \dfrac{500-300}{2} = 100$

$2\theta = 74°$ (s.i.t.y.)

$\sigma' = \dfrac{500-300}{2} = 100$

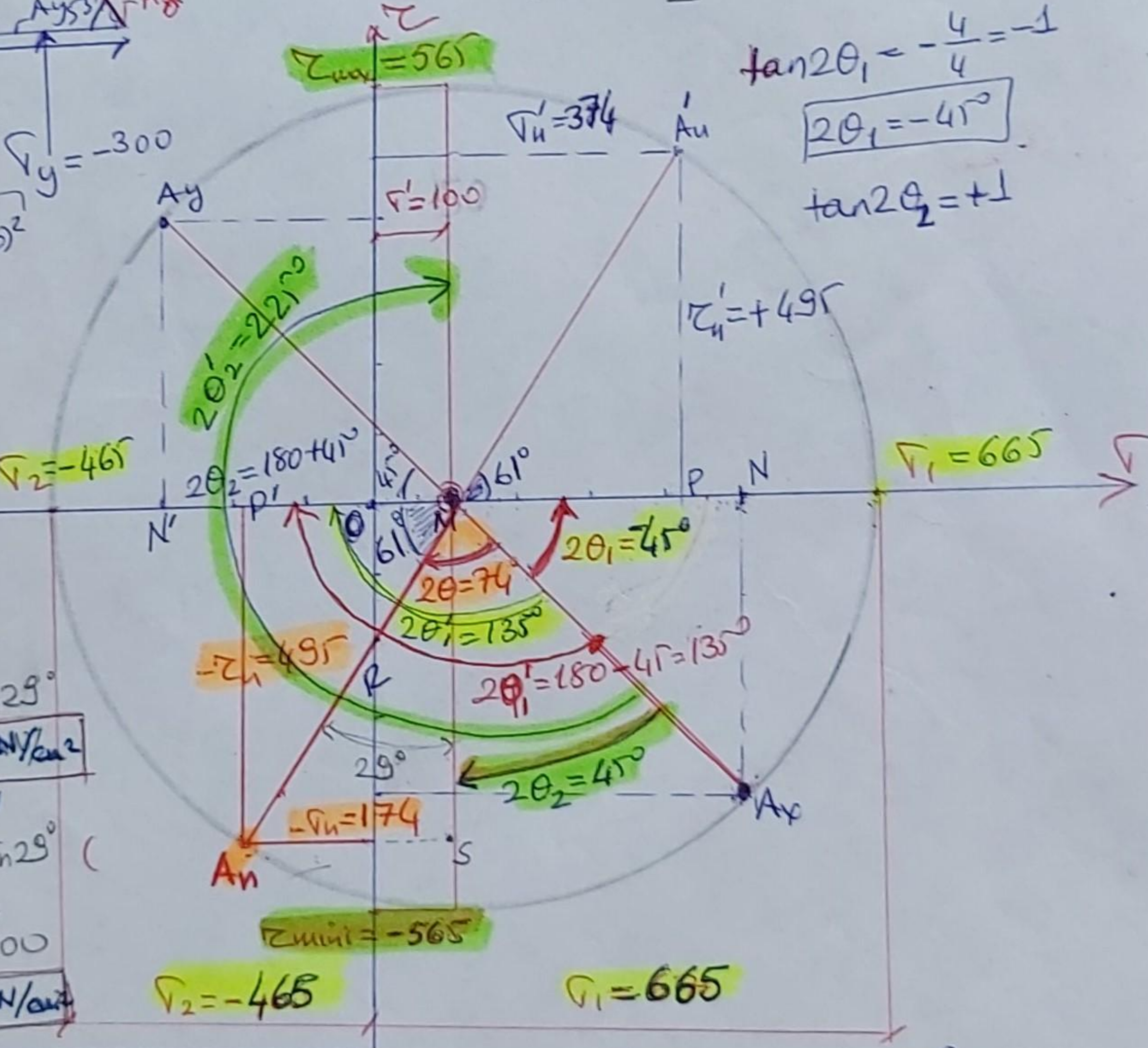
$\tan 2\theta_1 = -\dfrac{4}{4} = -1$

$\boxed{2\theta_1 = -45°}$

$\tan 2\theta_2 = +1$

$R = \sqrt{\left(\dfrac{500-(-300)}{2}\right)^2 + (400)^2}$

$\boxed{R \cong 565}$



τ_n hesabı

$\cos 29° = \dfrac{\tau_n}{R}$

$\tau_n = 565 \cdot \cos 29°$

$\boxed{\tau_n \cong -495\ kN/cm^2}$

$\boxed{\sigma_n = \overline{A_nS} - \sigma'}$

$\overline{A_nS} = 565 \sin 29°$

$\overline{A_nS} = 274$

$\sigma_n = 274 - 100$

$\boxed{\sigma_n = -174\ kN/cm^2}$

$\boxed{A_n(-\sigma_n; -\tau_n) = A_n(-174; -495)}$

$A_n \perp A_n'(\sigma_n'; \tau_n')$

$\boxed{A_n'(374; 495)}$

$\sigma_1 = 665 \Rightarrow 2\theta_1 = -45°$

$\sigma_2 = -465 \Rightarrow 2\theta_1' = 180-45 = 135°$

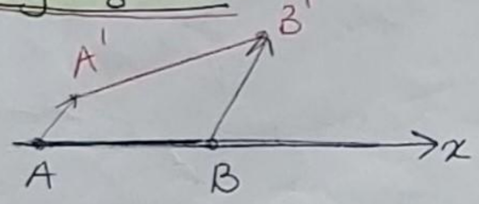
$\tau_{max} = 565 \Rightarrow 2\theta_2 = 180+45 = 225°$

$\tau_{min} = -565 \Rightarrow 2\theta_2 = 45°$

ŞEKİL DEĞİŞTİRME ve şekil değiştirme işi

Tanım: Bir katı cismin çeşitli noktalarının konumlarının birbirlerine göre değişmesidir.
Şekil değiştiren bir cismin çeşitli uzunluk ve açılarında değişiklikler olur.

Boy Değişimi:



AB: ilk durum

A'B': şekil değiştirmeden sonraki durum

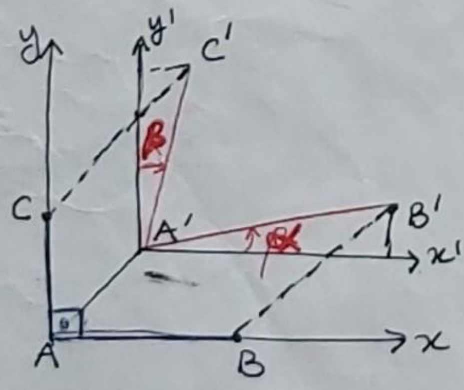
Bu şekil değiştirmede A ve B noktalarının yer değiştirmeleri $\vec{AA'}$ ve $\vec{BB'}$ vektörleri ile gösterilmiştir.

$$e = \frac{\Delta l}{l} = \boxed{\frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}}}$$

: Birim boyda meyd. gelen ortalama boy değişimi

Açı değişimi:

Mukavemette dik açıdaki değişimi, "açı değişimi birimi" olarak tanımlanır.



γ: Açı değişimi
Başlangıçta 90° olan $x\hat{A}y$ açısında $\boxed{\gamma = \alpha + \beta}$ kadar bir değişim meydana gelir.

$$\boxed{\gamma_{xy} = \alpha + \beta}$$

A noktasındaki xy dik açısındaki değişim

Açı değişimi oranları; radyanla ölçüldükleri için, boy değişimi oranları gibi, boyutsuz değerlerdir.

İşaretleme kuralı

Boy değişim oranı için; boy uzamaları (+), boy kısalmaları (−)

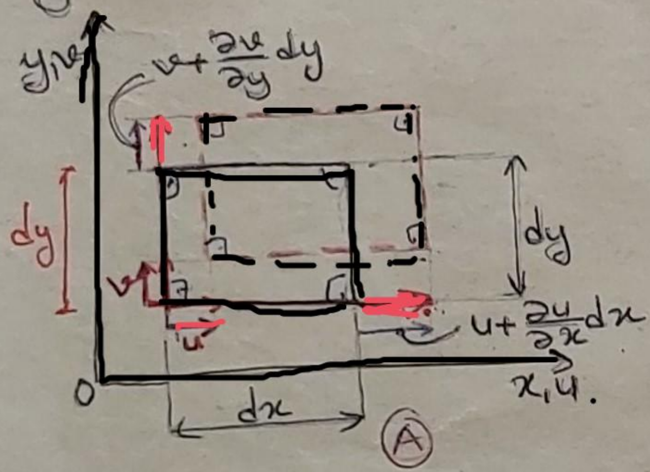
Açı değişimi oranı: 90°lik açıda: azalma (+), artma (−)

düzlemsel şekil değiştirme halinde yer ve şekil değiştirme bileşenleri arasındaki bağıntılar:

Şekil değiştirme esnasında yer değiştirme vektörlerinin tümü aynı bir düzleme paralel kalıyorsa buna düzlemsel şekil değiştirme denir.

(x-y) düzlemi içinde lineer şekil değiştirmeye ek olarak kayma şekil değiştirmesine de maruz kalan boyutları diferansiyel uzunluktaki elemanı göz önüne alalım. Her bir şekil değiştirme unsurunu ayrıca inceleyelim.

Her bir şekil değiştirme bileşenleri x ve y doğrultularındaki yer değiştirme bileşenleri sırayla "u" ve "v" olsun.



A şeklinden:

x doğrultusundaki lineer birim zorlanma:

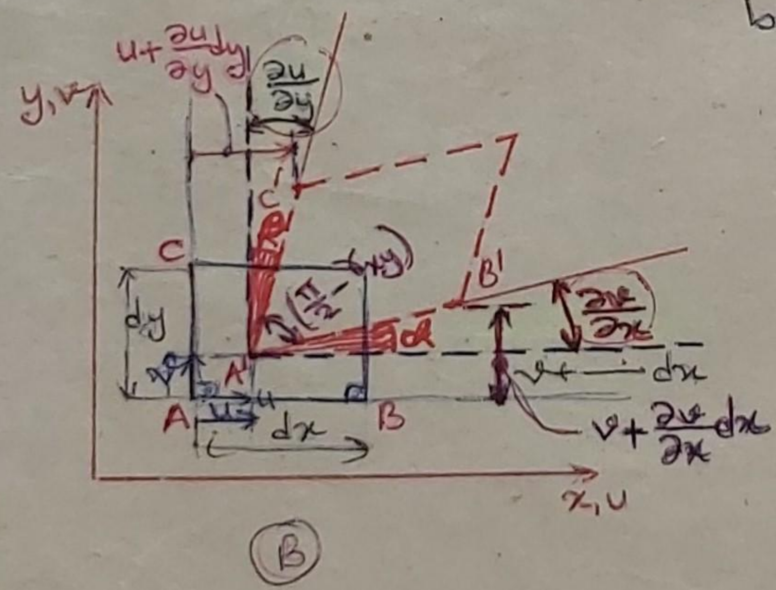
$$e_x = \frac{\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}.dx\right)-u}{dx} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}}$$

y doğrultusundaki lineer birim zorlanma:

$$e_y = \frac{\left(v+\frac{\partial v}{\partial y}.dy\right)-v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

olarak elde edilir.

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{(üç boy-)}$$



(x-y) düzlem içindeki kayma şekil değiştirmesi başlangıçta birbirlerine dik olan eleman yüzeylerini birbirlerine göre eğimli yapar (B). Başlangıçta elemanın yatay olan dx kenarının yeni durumdaki eğimi:

$\frac{\partial v}{\partial x}$ olur.

Benzer biçimde düşey dy kenarı ise ilk durumdan $\frac{\partial u}{\partial y}$ kadar sapar. Bunların sonucu olarak başlangıçta dik olan $\widehat{BAC}$ açısı $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ kadar küçülmüş olur. Bu toplama birim kayma şekil değiştirmesi (veya birim kayma zorlanması) denir ve

$$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

olarak gösterilir.

Elemanın şekildeki gibi açısal zorlanması halinde yani başlangıçta $90°$ olan açı küçüldüğü için γ_{xy} pozitif alınır; $90°$den büyüdüğünde ise γ_{xy} negatif alınır. Doğrusal zorlanmalarda ise uzama pozitif, kısalmalar ise negatif alınır.

Üç boyutta,

$$\gamma_{xz}=\gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{zy}=\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}$$

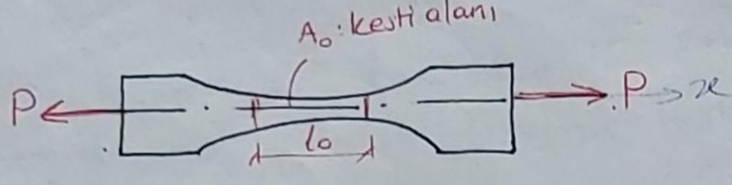
Gerilme - Şekil değiştirme bağıntıları:

Mukavemetle malzemenin şekil değiştirme bakımından homogen ve izotrop olduğu kabul edilir.

Homogen malzeme: Malzemenin homogen olması demek; bir noktasından diğer noktasına fiziksel ve kimyasal özelliklerinin değişmemesi demektir.

İzotrop malzeme: Malzemenin izotrop olması ise, aynı bir noktadaki fiziksel ve kimyasal özelliklerin bir doğrultudan diğerine değişmemesi anlamını taşır.

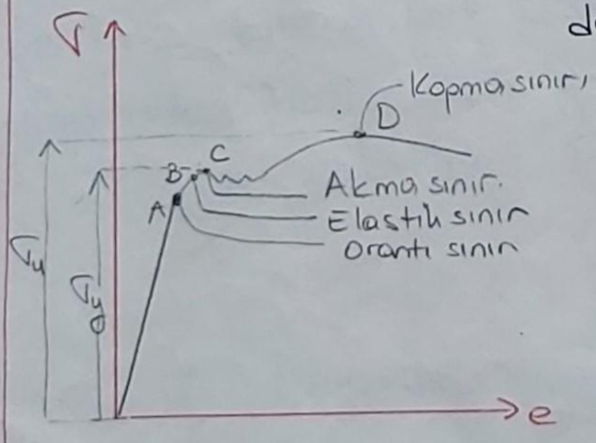
Çekme deneyi: Gerilme ile şekil değiştirme arasındaki fiziksel bağıntıları bulmada kullanılır.



yüksüz halde;
Kesit alanı: A_0
ilk boy : l_0
P: Eksenel kuvvet (Normal kuvvet)

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \qquad e = \frac{\overbrace{l - l_0}^{=\Delta l}}{l_0}$$

şeklinde tanımlanan gerilme ve uzama oranları hesaplanır ve $(\sigma - e)$ eksen takımında eğri çizilir. Bu eğriye Gerilme - şekil değiştirme diyagramı denir.



$$e = \frac{\sigma}{E}$$

E : Elastisite Modülü veya Young modulü

Çelikte:

$E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm²
$= 21 \cdot 10^6$ N/cm²

Deneyde; enine doğrultulardaki boy kısalmalarının, eksen boyunca meydana gelen uzamalarla orantılı olduğu görülür.

$$\nu = \frac{\text{enine def}}{\text{boyuna}} \qquad \boxed{e_{enine} = -\nu\, e_{boyuna}}$$

ν: Poisson oranı

Çelik için: $\nu = 0,25$
Al için: $\nu = 0,33$

Çekme esnasında artıp azalmayacağından yani sabit kalacağından: $\boxed{\nu \leq 0,5}$ olmak zorunda

Gerilme - şekil değiştirme bağıntılarındaki deneysel sabitler:

Gerilme - şekil değiştirme bağıntıları herhangi bir basitleştirici özelliği olmayan anizotropik malzeme için en genel halde, altı gerilme bileşeni, altı zorlanma bileşenine lineer olarak bağlayan altı denklem halindedir. Bu altı denklemde deney yoluyla belirlenmesi gereken 21 sabit vardır. Oysa mukavemette kullanılan birçok malzemenin her noktasında ve her doğrultusundaki özellik hemen hemen tümüyle aynıdır (HOOKE KANUNU). Bu koşullar altında yani lineer, elastik, homogen ve izotrop bir malzeme için söz konusu bağıntılar tek eksenli lineer gerilme- zorlanma bağıntısının genelleştirilmiş halinden ibarettir. Bu durum 21 sabit sayıyı 2$^{(\nu, E)}$ adete düşürür.

HOOKE KANUNU genelleştirilirken süperpozisyon ilkesi kullanılır ve çıkarılan bağıntılar bir gerilme bileşeninin doğurduğu zorlanmaların diğer gerilme bileşenleri üzerinde çok büyük etkiler yapmadığı haller için geçerlidir.

Deneysel sabitler: E : Elastisite modulü.
ν : Poisson oranı
G : Elastik kayma modülü

G sabiti bağımsız olmayıp, E ve ν den bulunur.

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

KAYMA MODULÜ

Elastik gerilme- şekil değiştirme bağıntılarının Genelleştirilmesi:

Çekme deneyi, bir eksenli gerilme halini gösterir. Bunu; iki ve üç eksenli haller için ifade etmek gerekir. Bu genelleştirmeyi yaparken, malzemenin homojen ve izotrop olduğunu kabul edip "süperpozisyon" Prensibinden yararlanılacaktır. Buna göre;

x yönünde gerilme uygulanırsa:

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad e_y = e_z = -\nu e_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{.......} (1)$$

şekil değ. cinsinden: $e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $e_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $e_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

y yönünde gerilme uygulanırsa:

$$e_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad e_z = e_x = -\nu e_y = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \quad \text{.........} (2)$$

z yönünde gerilme uygulanırsa:

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad e_x = e_y = -\nu e_z = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad \text{.......} (3)$$

Kayma gerilmelerinin meydana getirdiği şekil değiştirme ise, açı şeklinde olacaktır.

$$\tau = G\gamma : \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad \text{..} (4)$$

şekil değ. cinsinden:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

NOT: G: Kayma Modulü olup gerilme boyutundadır; [N/cm^2]

Elemana altı gerilme bileseninin aynı anda etki ettiği düşünülürse ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$), x, y, z doğrultularındaki bileske boy değişimlerinin süperpozisyon gereği (1), (2) ve (3) ifadelerinin toplanması ile açı değişimleri ise (4) ifadeleri gibi olacaktır.

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$e_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \quad \text{- - - -} \quad (1')$$

$$e_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E}$$

$$e_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \quad \text{- - - - - -} \quad (2')$$

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} \quad \text{- - - - - -} \quad (3')$$

$$e_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (4')$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad \text{- - - - - - - - - -} \quad (5)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \text{- - - - - - - - -} \quad (6)$$

$$e_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$e_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right], \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$e_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Bu denklemlere "genelleştirilmiş HOOKE kanunu" denir.

Hooke Kanununa uyan izotrop malzemede E, ν, G sabitleri arasındaki bağıntı:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

λ : Lamé sabiti : (gerilme boyutundadır)

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Isı değişiminden meydana gelen şekil değiştirme:

Isı değişimi, bütün izotropik malzemelerde her yönde eşit olan boy değişimleri doğurur. Bu boy değişimleri, ısının artması halinde uzama, azalması halinde ise kısalma şeklinde olur.

α : Isı genleşme katsayısı (malzemenin) $\left[\frac{1}{°C}\right]$

t_0 : Başlangıç sıcaklığı (°C)

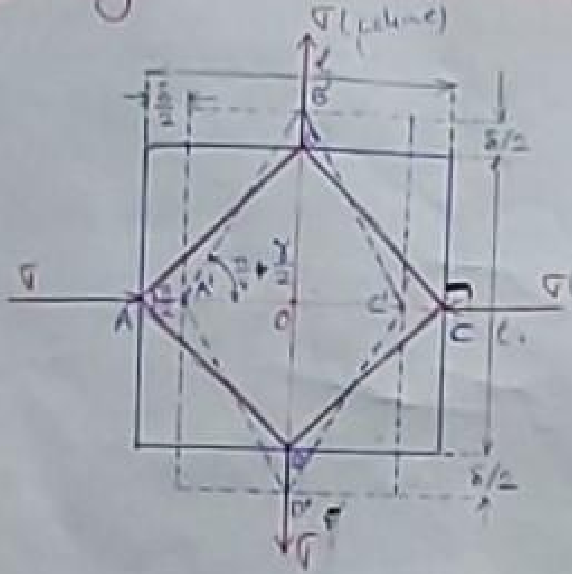
t : Son sıcaklık (°C)

$$\boxed{\begin{aligned} e_x &= \alpha(t - t_0) \\ e_y &= \alpha(t - t_0) \\ e_z &= \alpha(t - t_0) \end{aligned}}$$

Isı değişiminden dolayı oluşan şekil değiştirme oranları

NOT: Isı değişimi izotropik malzemede açı değişimi oluşturmaz.

G Kayma Modülünün elde edilmesi



Şekilde görülen bir kenarı (1) olan, eşit şiddette çekme ve basınç gerilmelerine maruz kalan bir küpü ele alalım. Bu cisim içinde, önce açıları dik olan ABCD şekli, şekil değiştirmeden sonra A'B'C'D' halini alır. Hooke kanunundan BD doğrultusundaki birim uzama:

$$e_y = \frac{\delta}{1} = \frac{\sigma}{E} + \nu\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E}(1+\nu)$$

olarak yazılabilir, şekle göre

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{OB'}{OA'} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}} = \frac{1+\frac{\delta}{1}}{1-\frac{\delta}{1}} \quad \text{.......... (1)}$$

γ açısı çok küçük bir değer old. dan $tg\frac{\gamma}{2} \cong \frac{\gamma}{2}$

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\frac{\gamma}{2}}{1-tg\frac{\pi}{4}\,tg\frac{\gamma}{2}} = \frac{1+\frac{\gamma}{2}}{1-\frac{\gamma}{2}} \quad \text{... (2)}$$

(1) ve (2) iki ifadelerinden: sağ tarafları eşitlersek:

$$\frac{1+\frac{\gamma}{2}}{1-\frac{\gamma}{2}} = \frac{1+\frac{\delta}{1}}{1-\frac{\delta}{1}} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = \frac{\delta}{1} = e_y \Rightarrow \gamma = 2e = \frac{2\sigma}{E}(1+\nu)$$

Diğer taraftan: aşağıda

σ ve τ mutlak değerce birbirine eşittir

$$\gamma = \frac{2\tau}{E}(1+\nu) = \frac{\tau}{G} \quad \text{yazılır}$$

Buradan da:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad \text{Kayma Modülü}$$

elde edilir

II. elde etme yolu

$$e_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$\sigma_x = -\sigma$, $\sigma_y = +\sigma$,

$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$

$$e_y = \frac{1}{E}(\sigma + \nu\sigma) = \frac{\sigma}{E}(1+\nu)$$

şiddet olarak: $\sigma = \tau \Rightarrow e_y = \frac{\tau}{E}(1+\nu)$

Hooke yasasından: $\gamma = \frac{\tau}{G} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{2G}$

$e_y = \frac{\tau}{2G}$, $e_y = \frac{\tau}{E}(1+\nu)$ $\Rightarrow \frac{\tau}{2G} = \frac{\tau}{E}(1+\nu)$

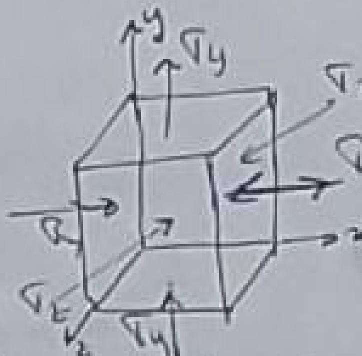
$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad \text{KAYMA MODÜLÜ}$$

Hacımsal elastisite Modülü : (K) :

Hacim değişim oranı : $\Delta V = e_v$

$$e_v = e_x + e_y + e_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y+\sigma_z)\right] + \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x+\sigma_z)\right]$$

e_v: Hacim değ. oranı $\qquad + \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]$



$$\boxed{e_v = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}$$

$-p$: hidrostatik basınç olmak üzere

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ olacağından bu haldeki hacim değişim oranı

$$e_v = \frac{1-2\nu}{E}(-p-p-p) \Rightarrow \boxed{e_v = -\frac{3(1-2\nu)}{E}p}$$

Hacim değişim oranı

$e = \frac{\sigma}{E}$

$e_v = \frac{-p}{K}$

E elastisite modülüne benzer olarak K hacimsal elastisite modülü de $K = \frac{-p}{e_v}$ $\quad \boxed{-p = K e_v}$ $\quad \sigma = Ee$, $\tau = G\gamma$

$$\boxed{K = \frac{-p}{-e_v}} \Rightarrow \boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}}$$

Hacımsal elastisite Modülü

$\sigma = Ee$

$p = K e_v$

$e_v = \frac{\Delta V}{V}$

Sıkıştırılamayan yani gerilme altında hacmi değişmeyen malzemede $e_v = 0$ ~~olacağından~~ olması gerekir ki bu da ancak :

$$1-2\nu = 0 \Rightarrow \boxed{\nu = 1/2}$$

olması ile mümkündür.