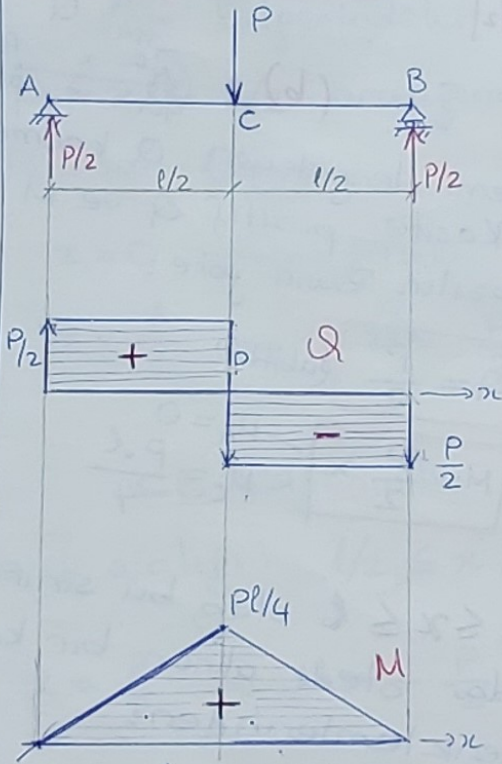


KESİT METODU İLE ÖRNEKLER

(Kesit metodu) Örnek problem: 1 - Şekildeki kirişin boyu " l " olup, orta noktasında bir P tekil yükü taşımaktadır. Kırma kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.



Çözüm: 1

Reaksiyon kuvvetlerinin bulunması:

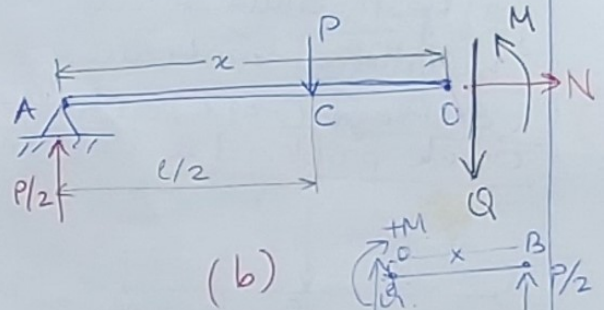
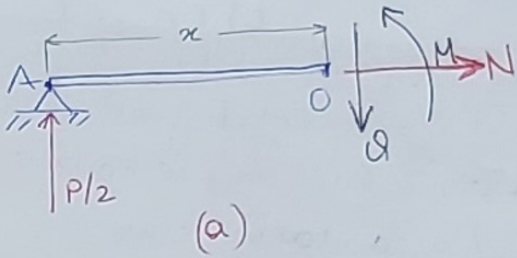
Kiriş simetrik yüklendiğinden A ve B mesnetlerindeki reaksiyonlar eşit olup $P/2$ değerindedir.

Önce yükleme durumuna göre, kiriste inceleme bölgeleri tespit edilmelidir. Genel olarak mesnetler, münferit yüklerin etki ettiği noktalar ile yayılı yüklerin başlangıç ve bitiş noktaları inceleme bölgelerinin sınırlarıdır.

Bu problemde, AC ve CB gibi inceleme bölgesi vardır. Bir inceleme bölgesinden diğerine geçişte Q ve M fonksiyonlarının sürekliliğinin bozulması sebebiyle, her bölgenin ayrı ayrı incelenmesi gerekir. Buna göre A mesneti başlangıç kabul edilerek, her bölgede alınan kenitlere göre Q ve M bağıntıları çıkarılır.

AC Bölgesi (a) şekli Bu bölgede matematik olarak;
 $0 \leq x \leq l/2$ şeklinde tanımlanır.

A noktasından x kadar mesafede ve bu bölge içinde kalmak şartıyla herhangi bir kesit alınarak sol parçanın dengesi araştırılır. Şekil: (a).



Şekil (a) daki kesit düzleminde sistemi dengeleyen Q kesme kuvveti ile M eğilme momenti doğar. Kesite pozitif Q ve M ilâve edilerek denge denklemleri yazılır. Buna göre:

$$\sum F_y = 0 : \frac{P}{2} - Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{P}{2} \text{ (sabittir)}$$

$$\sum M_O = 0 : -\frac{P}{2}(x) + M = 0 \Rightarrow M = \frac{P}{2}x$$

$M_A = 0$
 $M_C = \frac{P \cdot l}{4}$

elde edilir.
CB Bölgesi (b) şekli Tarif aralığı: $l/2 \leq x \leq l$ olup, bu sınırlar içinde kalan ve A'dan x kadar ötede alınan bir kesit incelenir. Şekil: (b). Denge denklemlerinden:

$$\sum F_y = 0 : -\frac{P}{2} + P + Q = 0 \Rightarrow Q = -\frac{P}{2}$$

$$\sum M_O = 0 : -\frac{P}{2}(x) + P\left(x - \frac{l}{2}\right) + M = 0 \Rightarrow M = -\frac{P}{2}x + \frac{Pl}{2}$$

$M_C = \frac{P \cdot l}{4}, M_B = 0$

bulunur.

Yukarıdaki x 'in fonksiyonu olarak elde edilen bağıntıların grafik haline dökülüp eğrilerinin çizilmesiyle, problem çözülmüş olur. Bu diyagramlar ekseriya seklin (yüklenme plânının) altına çizilir. (Problemde verilen şekil altı).

kesme kuvveti (Q) diyagramı.

(17)

AC bölgesinde, $Q = \frac{P}{2}$ ifadesi x 'e bağlı olmadığından monoton bir fonksiyondur. Grafik, $\frac{l}{2}$ mesafede x eksenine paralel bir doğrudur.

CB bölgesinde, $Q = -\frac{P}{2}$ fonksiyonu yine x eksenine paralel ve doğru şeklindedir.

Eğilme Momenti (M) diyagramı

AC bölgesindeki $M = \frac{P}{2} \cdot x$ fonksiyonu bir doğru olup $0 \leq x \leq l/2$ aralığında iki noktası belirlenerek çizilir.

Bunlar: ~~4/2~~

$$x=0 \Rightarrow M=0$$

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow M = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4} \text{ noktalarıdır.}$$

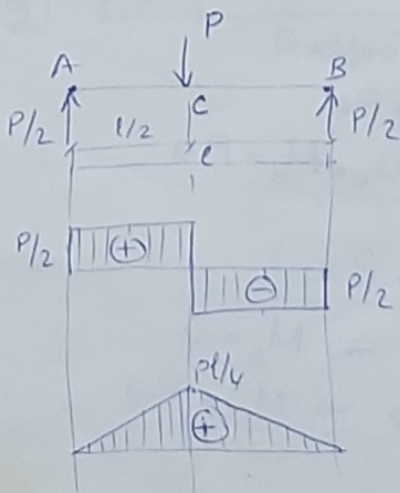
CB bölgesinde: $M = -\frac{P}{2} \cdot x + \frac{Pl}{2}$ fonksiyonunun

tarif aralığı: $l/2 \leq x \leq l$ dir.

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow M = -\frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{Pl}{2} = \frac{Pl}{4}$$

$$x = l \Rightarrow M = -\frac{P}{2} \cdot l + \frac{Pl}{2} = 0$$

noktaları birleştirilerek diyagram çizilir.



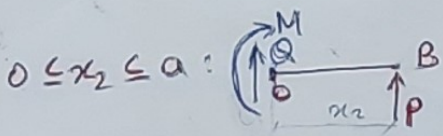
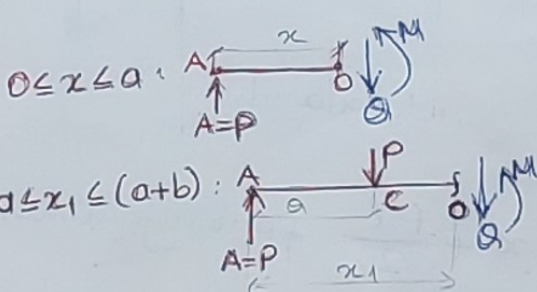
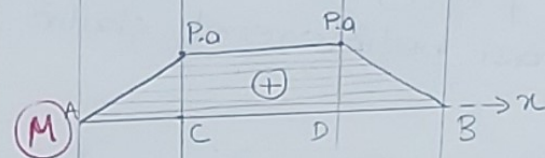
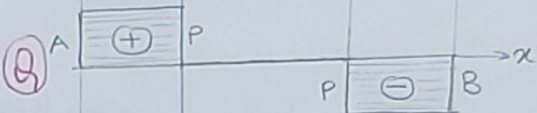
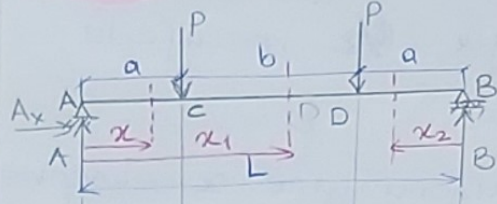
$$\begin{aligned} & 0 \leq x \leq l/2 \\ & \frac{P}{2} + Q = 0 \Rightarrow Q = -\frac{P}{2} \\ & \sum M_0 = 0: M - \frac{P}{2}x = 0 \Rightarrow M = \frac{P}{2}x \end{aligned}$$

$$x=0: M_B=0$$

$$x = \frac{l}{2}: M_C = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$$

2

Örnekleme: Basit bir kirişe simetrik ve birbirine eşit teklül yükün etki etmesi halinde kesme kuvveti ve moment diyagramlarını çiziniz.



Çözümü:

Mesnet tepkilerinin bulunması:

$$\sum F_x = 0 : A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 : A + B - 2P = 0$$

$$A + B = 2P$$

$$A = B = P \quad \text{simetrik}$$

Kesme kuvveti diyagramı:

$$0 \leq x \leq a : Q = A = P$$

$$a \leq x_1 \leq (a+b) :$$

$$\sum F_y = 0 : Q + P - P = 0$$

$$Q = 0$$

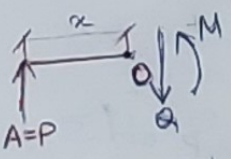
$$0 \leq x_2 \leq a :$$

$$\sum F_y = 0 : Q + P = 0$$

$$Q = -P$$

Moment diyagramı:

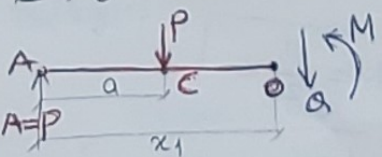
A ÷ C arasında: 0 ≤ x ≤ a



$$\sum M_o = 0 : -P \cdot x + M = 0 \Rightarrow M = P \cdot x$$

x = 0 ⇒ M_A = 0
x = a ⇒ M = P \cdot a = M_c

C ÷ D arasında: a ≤ x₁ ≤ (a+b)



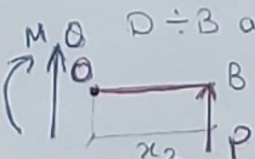
$$\sum M_o = 0 : -P \cdot x_1 + P(x_1 - a) + M = 0$$

$$M = +P \cdot x_1 - P \cdot x_1 + P \cdot a$$

$$M = P \cdot a$$

$$M_c = M_d = P \cdot a$$

D ÷ B arasında: a ≤ x₂ ≤ 0



$$\sum M_o = 0 : -P \cdot x_2 + M = 0 \Rightarrow M = P \cdot x_2$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow M_B = 0$$

$$x_2 = a \Rightarrow M_D = P \cdot a$$

Örnek: 3

Şekildeki AB basit kirişi, q t/m şiddetinde

bir düzgün yayılı (üniform) yük taşımaktadır. Kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz.

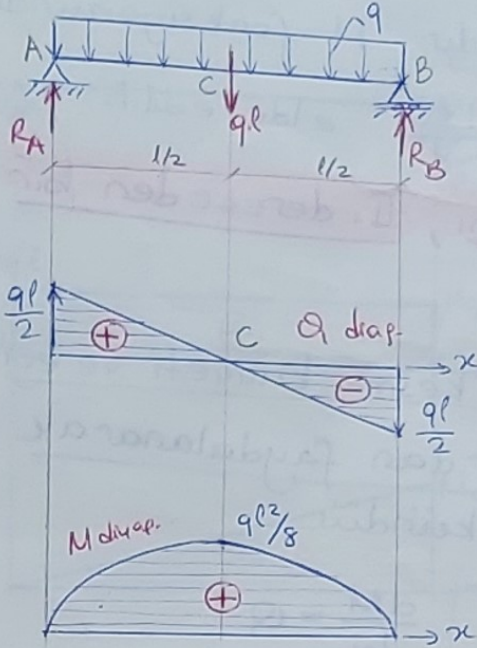
Çözüm:

Reaksiyon kuvvetleri:

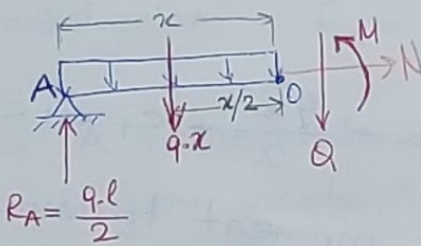
Kirişe gelen toplam yük $= q \cdot l$

Mesnetler bu yükü eşit olarak paylaşırlarından:

$$R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2}$$



Kesme kuvveti ve eğilme momenti bağıntıları:



AB boyunca yükün karakteri değişmediğinden kiriş, tarif aralığı $0 \leq x \leq l$ olan bir bölge içinde incelenecektir. Kiriş, A mesnedinden x kadar uzaklıkta kesildiğinde Q ve M kesit tenirleri doğacaktır.

Kesimle elde edilen sol parça, $q \cdot x$ değerinde bir yükü taşımaktadır. Bu yük, keside $x/2$ mesafede uygulanıyormuş gibi düşünülerek denge şartları yazılır. Buna göre:

$$\sum F_y = 0: -\frac{q \cdot l}{2} + q \cdot x + Q = 0 \Rightarrow Q = -q \cdot x + \frac{q \cdot l}{2}$$

$$\sum M_0 = 0: -\frac{q \cdot l}{2} (x) + q \cdot x \left(\frac{x}{2}\right) + M = 0 \Rightarrow M = -\frac{q x^2}{2} + \frac{q \cdot l \cdot x}{2}$$

Diyagramların çizimi:

$$x = 0 \text{ için: } Q_A = \frac{q \cdot l}{2}, \quad M_A = 0$$

$$x = l \text{ için: } Q_B = -\frac{q l}{2}, \quad M_B = 0 \text{ dir.}$$

$$x = \frac{l}{2} \text{ için: } Q_C = -q \frac{l}{2} + \frac{q \cdot l}{2}, \quad Q_C = 0, \quad M_C = -\frac{q l^2}{8} + \frac{q l \cdot l/2}{2}$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = 0: \text{ Moment maximum değerindedir. (13-)}$$

$$M_C = +\frac{q l^2}{8}$$

$Q = \frac{dM}{dx}$ olduğuna göre, $Q=0$ olan $x=l/2$ de moment eğrisinin maksimumu vardır. M fonksiyonunda

$x = \frac{l}{2}$ konularak $M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$ elde edilir

^{düğü} Dağılım yükü kiriste,
Görülüyor ki moment diyagramı, II. dereceden bir paraboldür.

II. Yol: İntegrasyon metodu:
NOT: Bu tip problemleri yük, kesme kuvveti ve eğilme momenti arasındaki bağlantılardan faydalanarak "integrasyon" ile çözmek mümkündür.

Daha önce; $\boxed{\frac{dQ}{dx} = -q}$ ve $\boxed{\frac{dM}{dx} = Q}$

olduğu görülmüştü. İntegral alınarak,

$$\frac{dQ}{dx} = -q \Rightarrow Q = -\int q dx = -qx + c_1$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \Rightarrow M = \int Q dx = (-qx + c_1) dx = -\frac{qx^2}{2} + c_1 x + c_2$$

bulunur. Sınır şartları mafisalların moment tasıması sebebiyle:

$$x=0 \text{ için: } M=0$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + 0 + c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

$$x=l \text{ için: } M=0 \text{ dir. } 0 = -\frac{ql^2}{2} + c_1 \frac{l}{2} + 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{ql}{2}}$$

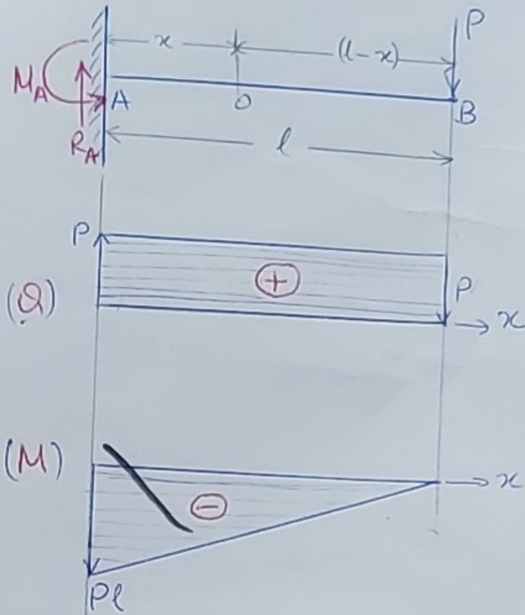
Bu sınır şartları uygulanarak $c_2 = 0$, $c_1 = \frac{ql}{2}$ ve dolayısıyla

$$\boxed{\begin{aligned} Q &= -qx + \frac{ql}{2} \\ M &= -\frac{qx^2}{2} + \frac{qlx}{2} \end{aligned}}$$

elde edilir.

örnek problem 5. (ANKASTRE (konsol) kiriş)

(22)



Şekildeki ankastre kiriş ucu-
dan P münferit yükü ile yük-
lenmiştir. Q ve M diyagramla-
rını çiziniz.

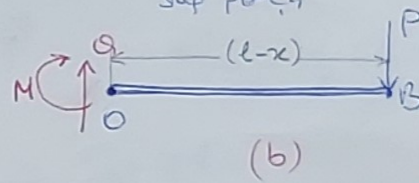
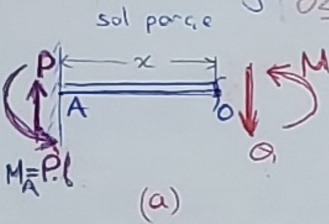
Çözümü:

Reaksiyon kuvvetleri:

$$\sum F_y = 0: R_A - P = 0 \Rightarrow R_A = P$$

$$\sum M_A = 0: M_A - P \cdot l = 0 \Rightarrow M_A = P \cdot l$$

Konsol kirişi, A mesnedinden x kadar ötede keserek sol par-
çanın dengesini araştıralım.



$$\sum F_y = 0: -P + Q = 0 \Rightarrow P = Q$$

$$\sum M_o = 0: M + P \cdot l - P(x) = 0$$

$$M = -P(l-x)$$

* Bu problem, reaksiyon kuvvetleri hesap-
lanmadan daha kısa olarak bulunur.
sağ parça incelenirse

$$\sum F_y = 0: Q - P = 0 \Rightarrow Q = P$$

$$\sum M_o = 0: +M + P(l-x) = 0$$

$$M = -P(l-x)$$

elde edilir.

Diyagramların çizimi:

a) Kesme kuvveti (Q) diyagramı: $Q = P$ old. sabit yatay doğrudan

b) Moment (M) diyagramı:

$$x = 0: M_A = -P \cdot l$$

$$x = l: M_B = -P(l-l) = 0$$

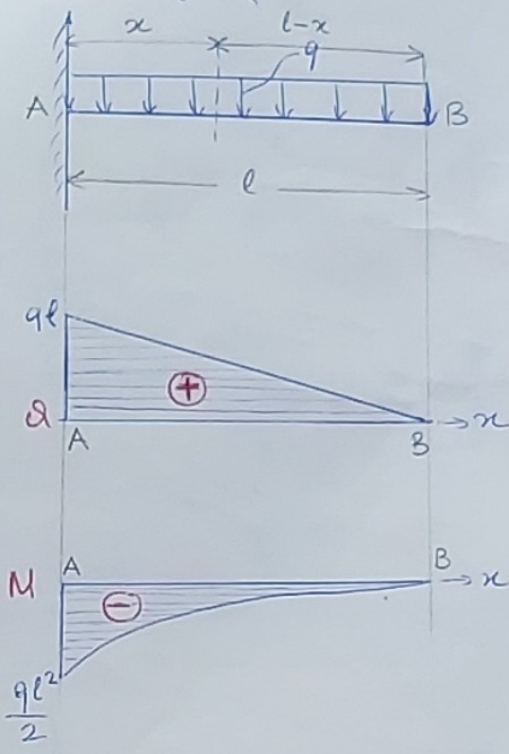
(16)

NOT: Konsol kirişlerde moment daima (-) dir.

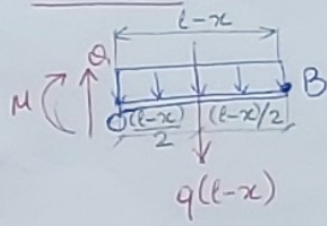
Yalnız konsol kirişlerde reaksiyon kuvvetleri bulunmadan, Q, M çizile-
bilir.

Örnek: 6

Şekilde görülen ve q üniform yayılı yükünü taşıyan konsol kirişin Q ve M diyagramlarını çiziniz.



Çözüm: $0 \leq x \leq l$



Mesnetten x uzaklıkta kesilen konsol kirişin sağ parçası incelenirse Denge şartları:

$$\sum F_y = 0: Q - q(l-x) = 0$$

$$Q = q(l-x)$$

$$\sum M_o = 0: +M + q(l-x)\left(\frac{l-x}{2}\right) = 0$$

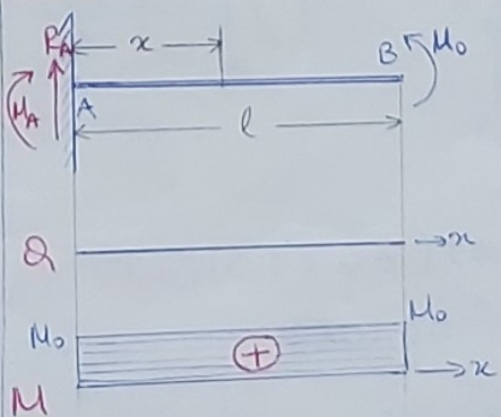
$$M = -\frac{q}{2}(l-x)^2$$

Diyagramların çizilmesi:

Kesme (Q) diyagramı: $x=0 \Rightarrow Q_A = q \cdot l$
 $x=l \Rightarrow Q_B = q(l-l) = 0$

Eğilme momenti (M) diyagramı: $x=0: M = -\frac{q}{2}l^2$
 $x=l: M = 0$

Örnek: 7. Serbest ucuna M_o münferit momenti tenireden konsol kirişin Q ve M diyagramlarını çiziniz.



Çözüm:

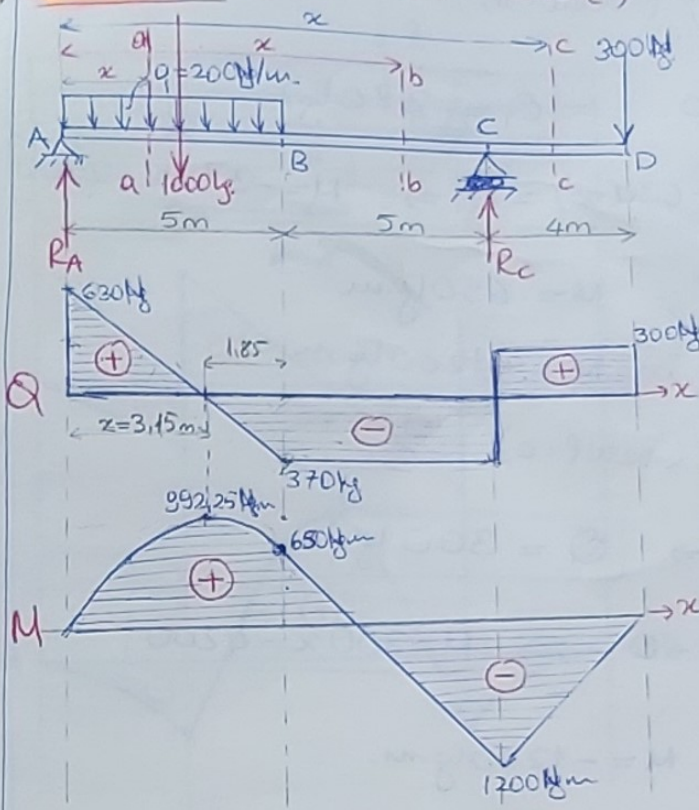
Reaksiyonlar: $R_A = 0$, $M_A = M$

Q ve M bağıntıları ise:

$$Q = 0 \quad M = M_o \text{ dir.}$$

2007 08 2016
Örnek: 8. (ÇIKMALI KİRİŞ)

(24) (B)



Şekildeki gibi yüklenen bir ucü çıkmalı kiriste, Q ve M diyagramlarını, bağıntılarını çıkararak çiziniz.

Çözüm:

Reaksiyon kuvvetleri:

$$\sum M_A = 0: -1000(2.5) + R_C(10) - 300(14) = 0$$

$$R_C = 670 \text{ N}$$

$$\sum M_C = 0:$$

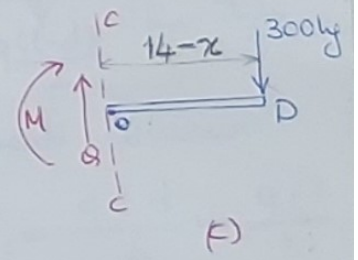
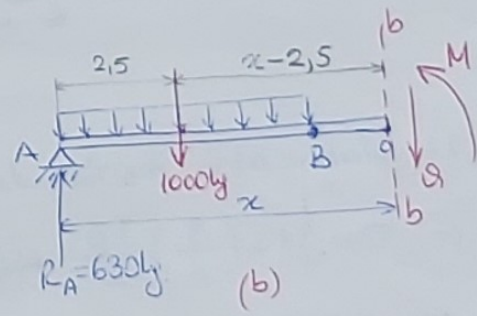
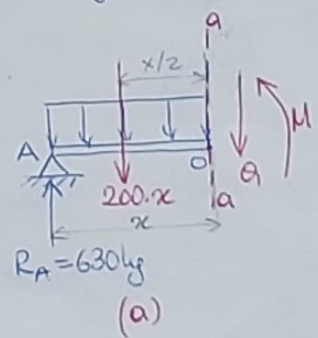
$$R_A(10) - 1000(7.5) + 300(4) = 0$$

$$R_A = 630 \text{ N}$$

$\sum F_y = 0$: şartından bu reaksiyon kuvvetlerinin doğruluğu sağlanabilir

Q ve M bağıntılarının bulunması:

Kiriş üzerinde yük şartlarının değiştiği noktalar: A, B, C, D dir. Buna göre kiriste AB, BC ve CD gibi üç bölge mevcuttur.



AB bölgesi ($0 \leq x \leq 5$) (Şekil: a)

$$\sum F_y = 0: 630 - 200x - Q = 0 \Rightarrow Q = -200x + 630$$

$$\sum M_o = 0: M + 200x\left(\frac{x}{2}\right) - 630(x) = 0 \Rightarrow M = -100x^2 + 630x$$

$Q = 0$ için M maksimumdur.

$$Q = 0 = -200x + 630 \Rightarrow x = 3.15 \text{ m} \Rightarrow M_{\max} = 992.25 \text{ Nm}$$

BC bölgesi: ($5 \leq x \leq 10$) (şekil: b)

$$\sum F_y = 0 : 630 - 1000 - Q = 0$$

$$Q = -370 \text{ kg}$$

$$\sum M_o = 0 : M + 100(x - 2.5) - 630x = 0 \Rightarrow M = -370x + 2500$$

$$x = 5 \text{ için: } Q = -370 \text{ kg; } M = 650 \text{ kg.m}$$

$$x = 10 \text{ için: } Q = -370 \text{ kg; } M = -1200 \text{ kg.m}$$

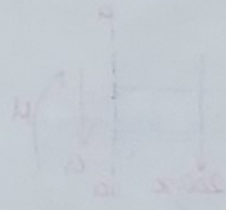
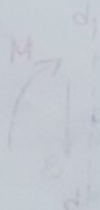
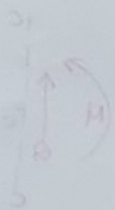
CD bölgesi: ($10 \leq x \leq 14$) (şekil: c)

$$\sum F_y = 0 : Q - 300 = 0 \Rightarrow Q = 300 \text{ kg}$$

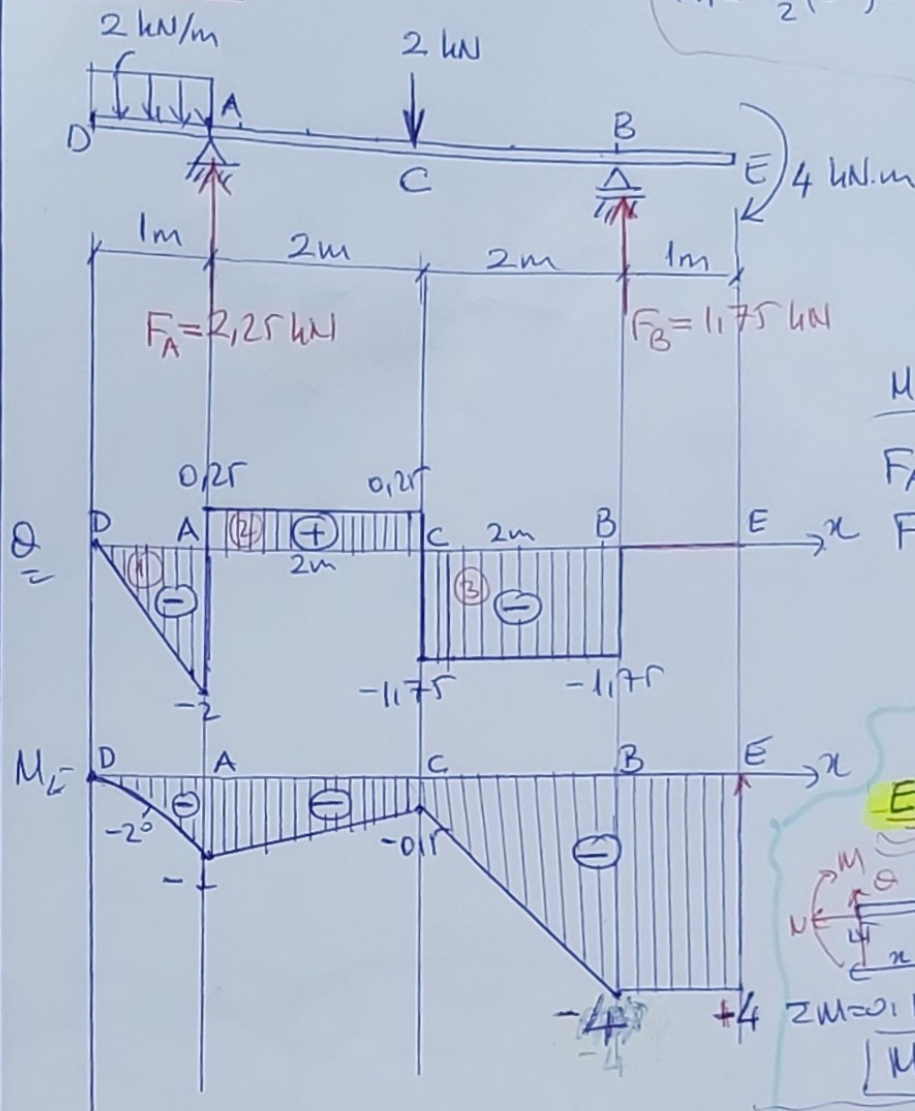
$$\sum M_o = 0 : -M - 300(14 - x) = 0 \Rightarrow M = 300x - 4200$$

$$x = 10 \text{ için: } Q = 300 \text{ kg, } M = -1200 \text{ kg.m}$$

$$x = 14 \text{ için: } Q = 300 \text{ kg, } M = 0$$



ÖRNEK 1



ALIN MÜDÜY?

$$A_1 = -\frac{1}{2}(2 \cdot 1) = -1, \quad A_2 = +(0,25 \cdot 2) = +0,5$$

$$A_2 = +0,5$$

$$A_3 = -(1,75 \cdot 2)$$

$$A_3 = -3,5 \text{ kN.m}$$

$$M_E = +4 \text{ kN.m}$$

Mesnet tepkileri

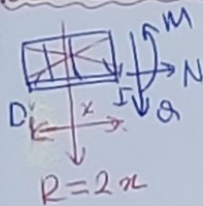
$$F_A = 2,25 \text{ kN}$$

$$F_B = 1,75 \text{ kN}$$

EB: $0 \leq x_4 \leq 1 \text{ m}$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 & \Rightarrow Q = 0 \\ \sum M = 0: M + 4 = 0 & \Rightarrow M = -4 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

DA: $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ m}$



$$\sum F_y = 0: Q + 2x = 0$$

$$Q = -2x$$

$$-x = 0: Q_D = 0$$

$$-x = 1: Q_A = -2 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0:$$

$$M + (2x) \left(\frac{x}{2} \right) = 0$$

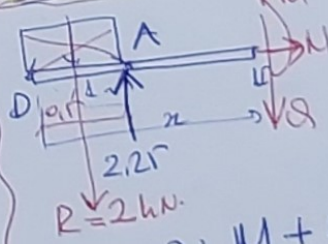
$$M = -x^2$$

$$-x = 0: M_D = 0$$

$$-x = 1: M_A = -1 \text{ kN.m}$$

Parabol is bukey olarak

AC: $1 \leq x_2 \leq 3 \text{ m}$



$$R = 2,25$$

$$\sum F_y = 0: Q + 2,25 = 0$$

$$Q = -2,25$$

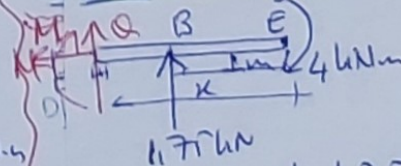
$$\sum M_A = 0: M + 2(x - 0,5) - 2,25(x - 1) = 0$$

$$M = 0,25x - 1,25$$

$$-x = 1 \Rightarrow M_A = -1 \text{ kN.m}$$

$$-x = 3 \Rightarrow M_C = -0,5 \text{ kN.m}$$

BC: $1 \leq x_3 \leq 3 \text{ m}$



$$\sum F_y = 0: Q + 1,75 = 0$$

$$Q = -1,75$$

$$\sum M_B = 0: M - 1,75(x - 1) + 4 = 0$$

$$M = 1,75x - 5,75$$

$$-x = 1: M_E = -4 \text{ kN.m}$$

$$-x = 3: M_C = -0,5$$